臺大管理論叢 2015/6
第 25 卷第 2 期 181-214
DOI: 10.6226/NTUMR.2015.Oct.R.12041

以 SABR-LMM 模型進行利率衍生性金融商品評價之探討

Pricing Interest Rate Derivatives with SABR-LMM Models

葉仕國 / 國立中興大學財務金融系教授
Shih-Kuo Yeh, Professor, Department of Finance, National Chung-Hsing University

游承翰 / 中信銀行全球金融市場風險管理處與市場風險管理部專員
Cheng-Han Yu, Specialist, Market Risk Management and Global Financial Markets Risk Division, CTBC Bank

Received 2012/6, Final revision received 2013/10

摘 要

選擇權市場中隱含波動度微笑曲線是相當常見的現象，但加入隨機波動度後的評價模型往往難以得到封閉解。本研究嘗試使用 Mercurio and Morini (2009) 所提出的 SABR-LMM 模型評價利率衍生性金融商品，除了可以有效地解釋隱含波動度所出現的微笑曲線或偏斜情況，並且可以獲得近似封閉解。本研究並發展出一套獨特的校準工作程序，使該一複雜的模型能成功地用實際市場資料進行參數校準，也推導出此模型下考慮了利率與波動度間相關性後的避險參數，該參數更能提供交易員一個較明確的方向來判斷利率變動與波動度變動之間的交互作用。

透過實證研究，我們發現 SABR-LMM 模型能夠完整地校準出市場上利率交換選擇權資料所代表的波動度曲面。另外，我們也模擬出 SABR-LMM 模型下遠期利率以及隨機波動度的動態過程，並以數值案例作評價與分析，也說明 SABR-LMM 模型與傳統的 LIBOR 市場模型在避險比率的計算上有何差異及相對優點。

【關鍵字】SABR 模型、隨機波動度、LIBOR 市場模型

Abstract

The appearance of implied volatility smile or skew has been well documented in the options market. However, it is very difficult to obtain closed-form solution if stochastic volatility is taken into account. This study employs the SABR-LMM (LIBOR Market Model) model proposed by Mercurio and Morini (2009) to price interest rate derivatives. The model can derive an approximate closed-form solution and explain volatility smile or skew phenomenon very well. This study also develops a unique procedure to calibrate the SABR-LMM model to market transaction data successfully. In addition, we derive the relevant hedge ratios considering the correlations between interest rates changes and volatility changes, which can provide concrete guidance for traders to judge the interactions between interest rate changes and volatility changes. This study also conducts an empirical examination to find that the SABR-LMM model can sufficiently calibrate the whole interest rates swaption volatility surface and accurately capture the volatility skew, which cannot be well dealt with traditional LIBOR market models. Finally, we simulate the forward rates and stochastic volatility dynamics under the SABR-LMM model and use the result to price interest rates products numerically. Also, this study demonstrates the differences and the advantages between the SABR-LMM model and LIBOR market models while calculating hedge ratios.

【Keywords】SABR model, stochastic volatility, LIBOR market model

臺灣大學學術期刊資訊網

壹、緒論

隨著國際間利率全面解除管制後，利率相關之金融商品也成為國際金融市場主要的交易標的，避險者可以經由利率衍生性金融商品的交易，對不同天期的資產以及負債進行有彈性且有效率的避險，因此能有效地大幅規避利率變動所造成的風險。而這些利率衍生性金融商品中又以利率交換合約 (Interest Rate Swap) 為最重要的交易工具。但為了能夠捕捉到不同種類或天期的利率風險，因此市面上發展出越來越複雜的利率新金融商品。例如：固定期限利率交換 (Constant Maturity Swap; CMS) 的相關產品，如 CMS Spread Option、CMS Ratchet Option、CMS Spread Range Accruals 等。但這些工具的評價工作和風險管控的工作難度也日益加劇。

目前實務上大多使用 Brace, Gatarek, and Musiela (1997) 等人所發展出來的無套利架構 LIBOR 市場模型 (LIBOR Market Model; LMM)，來對較複雜的利率衍生性金融商品評價，主要是因為此模型能夠以市場中實際交易的資訊來對模型中標的資產的波動度與相關性結構做精確的校準，使模型參數符合市場動態，因此對於具有未來現金流量之固定收益性質的商品，往往能夠擁有較佳的分析與評價結果。

然而以往使用 LIBOR 市場模型時，對標的資產波動度的假設通常過於簡單，但在近期的實證研究上卻發現，波動度的實際行為相當複雜，其中最著名的便是選擇權商品交易價格中會出現「波動度微笑曲線」的現象，說明了波動度仍具有其波動度 (Volatility of Volatility)。傳統的 Black and Scholes (1973) 模型對於波動度之設定為常數，這意味著由模型所計算出相同標的資產且具有相同到期日的選擇權理論價值，在同履約價下仍會有相同的波動 ，但是這卻與現實選擇權市場中隱含波動度在不同履約價具有不同波動度的情形不符合，此現象常被稱之為波動度微笑 (Volatility Smile) 或波動度偏斜 (Volatility Skew)。

在描述微笑曲線特性的隨機波動度模型當中，早期以 Dupire (1997) 和 Derman and Kani (1998) 所發展出的局部波動度模型 (Local Volatility Model) 為主，此模型可以經由市場上所觀察到的微笑曲線資料來做精準的模型校準。此外，局部波動度模型在管理波動度偏斜所造成的風險效果相當好，因此在當時廣受歡迎。不幸的是，Hagan, Kumar, Lesniewski, and Woodward (2002) 發現局部波動度模型在預測波動度微笑曲線的變動方向時，不符合市場上真正的動態，甚至預測的方向完全相反：亦即，當標的資產的價格下跌時，模型預測微笑曲線會往資產價格較高的地方移動；反之當資產價格上升時，模型預測微笑曲線會往資產價格低的地方移動，但市場實際的情況為資產價格與微笑曲線會有一致的動態行為。這個缺點將導致交易員在計算避險比率上的效果不佳，甚至比原本的 Black and Scholes (1973) 模型表現還差。

在指出局部波動度模型在動態預測上的缺陷後，Hagan et al. (2002) 遂提出一套使用隨機波動度來處理微笑曲線的二因子模型，稱為 SABR (Stochastic Alpha Beta Rho)

臺灣土地銀行資訊中心

模型，作者除了考慮標的資產的遠期價格之外，還加入隨機波動度因子來模擬微笑曲線的特性，因為作者發現市場上的資產價格都會有相對沉寂以及活躍的時候，因此認為標的資產的遠期價格與其波動度應該都具有隨機性，而且二者之間彼此相關。往後的研究也發現，SABR 模型除了可以較正確的預測波動度曲線的動態行為之外，並且可以得到封閉解，因此在管理具有微笑曲線特性的衍生性金融商品上相當有效率。

儘管 SABR 模型能妥善處理波動度曲線的形狀，然而該模型僅能夠使用在獨立的個別標的資產上，因此無法模擬出一組彼此相關、且具不同到期期限或存續期間的遠期標的資產的聯合動態。然而，利率衍生性商品的標的資產往往為一組不同到期日的利率或是不同性質的利率，故評價較複雜的利率衍生性商品便成為 SABR 模型的一大限制。業界往往習慣使用 LMM 模型來評價較複雜的利率衍生性商品，主要是因為 LMM 為可模擬一組遠期利率且同時兼顧利率間的相關性，對於歐式的利率衍生性商品也擁有與 Black (1976) 模型一致的封閉解。但是也因為受限於 LMM 模型的波動度為常數的假設，LMM 無法捕捉到歐式利率衍生性商品的波動度微笑曲線，因此需要額外對遠期利率波動度做隨機性的假設，才能補強傳統 LMM 模型在處理隨機波動度上的不足。

有鑑於 LMM 模型在處理波動度上的弱勢，許多學者紛紛提出了考慮隨機波動度的 LMM 模型 (Stochastic-Volatility LMM Model; SV-LMM)[1]，Henry-Labordère (2007) 則指出將利率假設為 SABR 的隨機過程才能完整描述利率交換選擇權的波動度微笑。Rebonato (2007) 也對 SV-LMM 模型的結合做了不同的研究，但是 Rebonato (2007) 並非與 Henry-Labordère (2007) 一樣，從假設遠期利率符合 SABR 的動態過程著手，乃是改以參數校準的角度結合 SABR 與 LMM 模型，發展出一個模擬結果與 SABR 隱含波動度方程式相似的 LMM 模型。然而 Mercurio and Morini (2009) 指出 Rebonato (2007) 的模型之隨機波動度於不同機率測度下的動態轉換中並未保持遠期利率間的無套利關係。

而 Mercurio and Morini (2009) 的模型最大的優點在於可推導出 SABR-LMM 下隨機波動度的近似動態過程，求得可以利用 SABR 隱含波動度公式算出的利率 Swaption 近似波動度。然而，該模型包含了太多參數且隱含波動度封閉解相當複雜，因此最佳化求解的過程將會沒有效率且耗費非常多的時間，所以無法一次校準完整的波動度曲面。綜合前述的討論後，本研究根據游承翰 (2010) 之作法，利用利率之 Cap/Floor 或 Swaption 等產品的市場報價對模型做參數的校準，使校準的工作快速且簡單，並採用 Mercurio and Morini (2009) 的 SABR-LMM 模型援用實際的市場資料進行探討，評價

1 較早期的 SV-LMM 模型可參考 Andersen and Andreasen (2000)、Joshi and Rebonato (2003)、Piterbarg (2005)、Wu and Zhang (2006)。

臺灣大學學術期刊資料庫

相關利率衍生性金融商品，以及對此模型的績效做探討。本研究並發展出一套獨特的校準工作程序，使該一複雜的模型能成功地用實際市場資料進行參數校準，對於整個模型在校準上更具方便性且有效率。

而本研究除了發展出較簡潔之方法將 SABR-LMM 模型推廣至應用於評價複雜的利率衍生性商品外，傳統 LMM 模型在計算避險比率時僅考慮標的利率單獨變動對商品價值所造成的影響，因此隱含著利率與波動度間互為獨立。而實際上利率與其波動度間具有相關性，因此在計算避險比率時應考量波動度因利率變動對商品價值所造成之額外影響。本研究乃推導出此模型下考慮了利率與波動度間相關性後的避險參數，該參數更能提供交易員一個正確方向來判斷利率變動與波動度變動之間的交互作用，且計算方式簡易。而文章最後也說明若使用一般傳統 LMM 進行避險工作將有可能造成過度避險或避險不足的誤判風險。相較於先前所提到的諸多 SV-LMM 模型因較複雜致使在實際應用上將會有相當難度，本研究則提供一個較方便的選擇讓該模型可以較容易應用在實務工作。

根據國內中央銀行 101 年 6 月底銀行衍生性金融商品未結清契約名目本金餘額的統計，國內銀行衍生性金融商品餘額以利率契約占 51.38% 為最多，而店頭市場交易方式又占了 99.83%，但是國內對 SABR-LMM 這麼複雜卻頗具應用價值的模型之探討卻相當缺乏，因此本研究相信可以對國內銀行在交易店頭市場的利率衍生性金融商品契約不論是在評價技術或風險管控風險皆有一定的貢獻。本研究第貳部分介紹相關的理論模型，第參部分則介紹如何進行型模型參數的校準工作，第肆部分乃應用 SABR-LMM 模型針對特定的利率衍生性商品進行評價與分析工作，第伍部分則是結論。

貳、理論模型介紹

Hagan et al. (2002) SABR 模型的設計如下：

$$\begin{aligned} d\hat{F} &= \hat{\alpha}\hat{F}^{\beta}dW_1, \quad \hat{F}(0) = f \\ d\hat{\alpha} &= \nu\hat{\alpha}dW_2, \quad \hat{\alpha}(0) = \alpha \\ dW_1 dW_2 &= \rho dt \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $\hat{F}$ 表示標的資產的遠期價格，符合 CEV (Constant Elasticity of Variance) 的隨機過程、$\hat{\alpha}$ 為 $\hat{F}$ 之隨機波動度、而 β、ν、ρ 為模型的固定參數，與時間無關的函數： β 參數影響了標的資產的遠期價格與價平之隱含波動度的動態關係，而且隨著到期期限的不同而改變，以下為兩個特殊情況：當 $\beta = 0$ 時，$\hat{F}$ 的隨機過程符合常態分配，此時微笑曲線的軌跡會隨著標的資產的遠期價格上升而下降；而當 $\beta = 1$ 時， $\hat{F}$ 的隨機過程為對數常態分配，此時微笑曲線的軌跡會呈現水平狀態而與資產遠期價格無關。ν 參數用來衡量隨機波動度的波動性，而 ρ 參數則表示 W_1、W_2 兩個標準布朗運動在遠

臺灣人壽保險股份有限公司

期機率測度 Q^F 下的相關性。

然而 SABR 模型最大的優點在於可以推導出像 Black and Scholes (1973) 模型的歐式選擇權價格，並從其中求得隱含波動度的近似封閉解，此隱含波動度的公式不但能夠正確的捕捉市場上的微笑現象，應用於商品評價或相關避險比率的計算上皆非常便利而且有效率，而這也是 SABR 模型廣泛受到業界重視的原因。

SABR 模型隱含波動度公式如下 (t_{ex} 為選擇權的履約日)：

$$\sigma_{SABR}(\alpha,\beta,\rho,\nu,f,K,T)=\frac{\alpha}{(fK)^{\frac{(1-\beta)}{2}}\left\{1+\frac{(1-\beta)^2}{24}log^2\left(\frac{f}{K}\right)+\frac{(1-\beta)^4}{1920}log^4\left(\frac{f}{K}\right)+\cdots\right\}}\cdot$$

$$\left(\frac{z}{x(z)}\right)\cdot\left\{1+\left[\frac{(1-\beta)^2}{24}\frac{\alpha^2}{(fK)^{1-\beta}}+\frac{1}{4}\frac{\rho\beta\nu\alpha}{(fK)^{\frac{(1-\beta)}{2}}}+\frac{2-3\rho^2}{24}\nu^2\right]t_{ex}\right\}+\cdots \quad (2)$$

其中

$$z=\frac{\nu}{\alpha}(fK)^{\frac{(1-\beta)}{2}}log(\frac{f}{K})$$

$$x(z)=log\left\{\frac{\sqrt{1-2\rho z+z^2}+z-\rho}{1-\rho}\right\}$$

另外，當選擇權為價平時，(2) 式的隱含波動度的公式可以再簡化如下：

$$\sigma_{ATM}=\sigma_{\mathrm{SABR}}(f,f)=\frac{\alpha}{f^{(1-\beta)}}\left\{1+\left[\frac{(1-\beta)^2}{24}\frac{\alpha^2}{f^{2-2\beta}}+\frac{1}{4}\frac{\rho\beta\nu\alpha}{f^{(1-\beta)}}+\frac{2-3\rho^2}{24}\nu^2\right]t_{ex}\right\}+\cdots \quad (3)$$

對於一般歐式選擇權的評價，只要將由前述隱含波動度公式所計算出的波動度代入傳統 Black and Scholes (1973) 模型中即可求得選擇權的理論價格。以下我們一一介紹各個參數變動時對 SABR 模型在模擬之微笑曲線上所造成的影響[2]：

一、參數 α

$\alpha(\alpha \geq 0)$ 主要用來控制微笑曲線的高度，α 值越大時微笑曲線的高度越高；反之亦然。如圖 1 所示，當 α 值從 0.266 增加至 0.316 的同時，微笑曲線的高度也順勢往上攀爬，α 表示在 t = 0 時對未來波動度的期望值，若預期未來波動度越大則對目前整體的平均波動度而言亦越高。另外從圖 1 中亦可以發現當 α 值改變時，低履約價的隱含波動度增加的幅度遠大於高履約價的隱含波動度，顯示 α 參數的改變對於整條微笑曲

2 在此部分以 2005/9/28、履約價為 0.0338 的 Euro Swaption 為例，詳細報價請參考第肆部分實證研究。

臺灣大學學術期刊資訊網

線的影響並非完全一致。

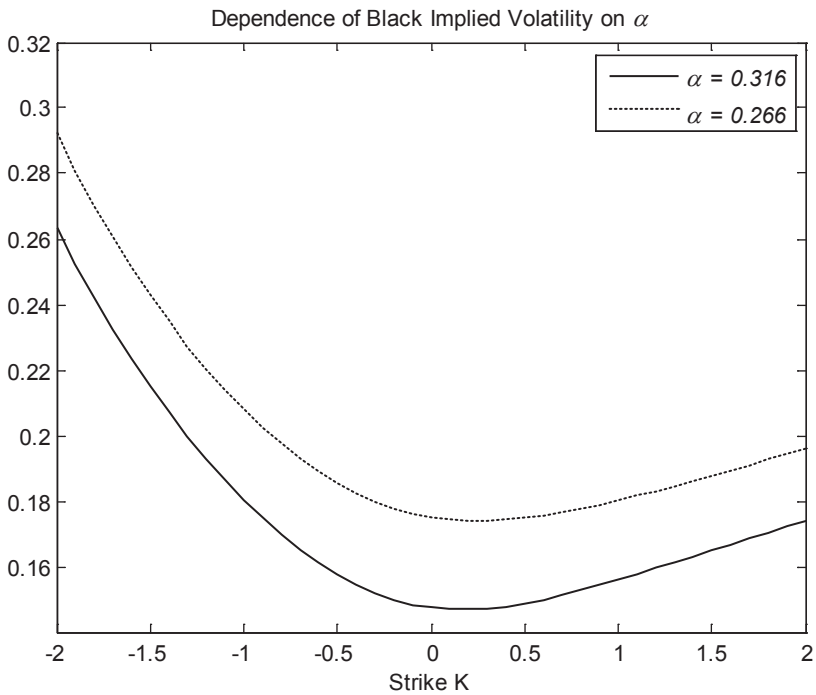


圖 1 參數 α 對波動度微笑曲線的影響

二、參數 β

β $(0 \le \beta \le 1)$ 參數控制微笑曲線彎曲的形狀，主要有三種不同的影響：

1. β 值的大小影響了微笑曲線的高度，因為 β 扮演了隨機項 $\hat{\alpha}\hat{F}^{\beta}$ 的指數角色，所以當 β 越靠近 1 時 $\hat{F}^{\beta}$ 值就會越小（$\hat{F}$ 通常小於 1），因此整體的波動度大小也隨之下降，反之亦然。
2. 當 β 值從 1 遞減至 0 時，微笑曲線的傾斜程度也逐漸上升，這與參數 ρ 具有相同的效果，所以在模型配適時，我們通常會固定 β 值，讓 ρ 來決定微笑曲線的傾斜程度。
3. β 值的大小也控制了微笑曲線的彎曲程度，β 越大則曲線越平滑，反之 β 越小曲線微笑的曲率越大、弧度越明顯。

臺灣大學學術期刊資料庫

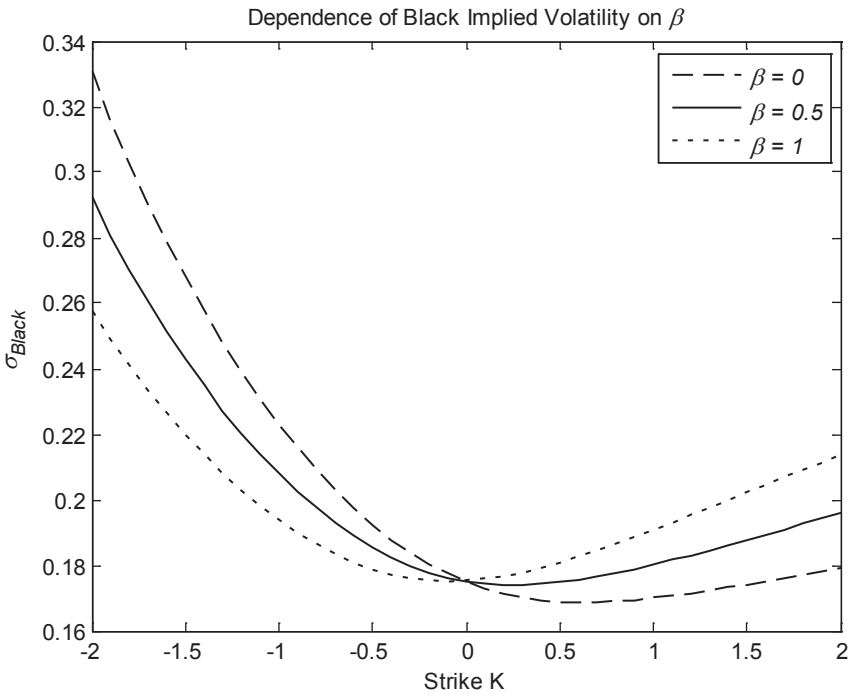


圖 2 參數 β 對波動度微笑曲線的影響

三、參數 ρ

$\rho(-1 \le \rho \le 1)$ 為標的資產價格與波動度間的相關性，一般而言，此二者呈現負向關係，從圖 3 可看出當 ρ 為 0 時，曲線較為平緩；相反地，當 ρ 越靠近 -1 時，曲線越陡峭，也些微地影響到曲線的曲度。

臺灣大學學術期刊資料庫

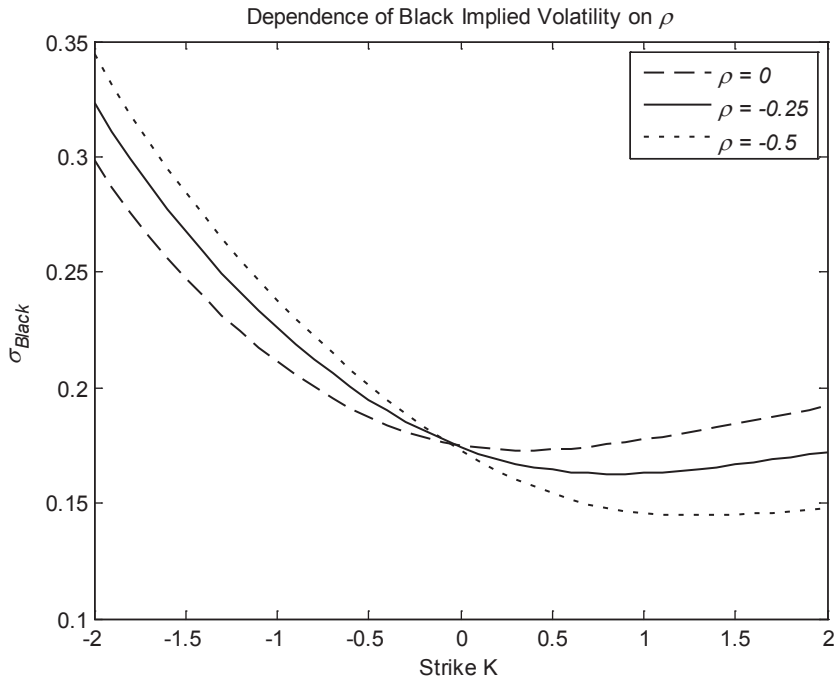


圖 3 參數 ρ 對波動度微笑曲線的影響

四、參數 υ

最後我們介紹波動度的波動性參數 v ($v > 0$)，其最主要的工作便是控制微笑曲線的微笑程度，相較於 β 與 ρ（β、ρ 值的增加通常會造成曲線價外的部分向上彎而價內部分向下彎），v 對波動度曲線彎曲幅度的影響則明顯許多，從圖 4 可看出當 v 值越大則微笑曲線微笑的幅度越大，反之亦然。

臺灣大學學術期刊資料庫

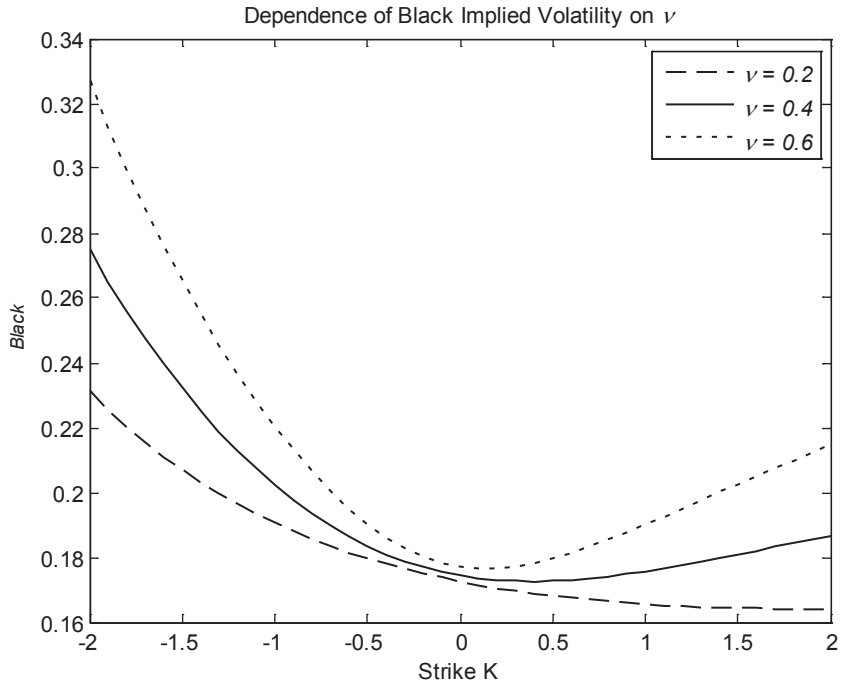


圖 4 參數 ν 對波動度微笑曲線的影響

有鑑於 SABR 僅能使用在單一標的資產上與 LMM 無法處理波動度微笑曲線的限制，因此本研究將採用 Mercurio and Morini (2009) 的 SABR-LMM 模型來評價較為複雜的利率衍生性金融商品。Mercurio and Morini (2009) 沿用 Henry-Labordère (2007) 的構想，假設遠期利率 F_k 與隨機波動度因子 V 在即期機率測度 Q^d 下（以 $B_d(t)$ 作為計價單位），有類似 SABR 模型的動態過程：

$$dF_k(t) = \mu_k^Q(t)dt + \sigma_k V(t)F_k(t)^\beta dZ_k^Q(t) \tag{4}$$
$$dV(t) = \nu V(t)dW^Q(t), \qquad V(0) = \alpha$$

在 Mercurio and Morini (2009) 的模型中，在基準點現值 $C_{a,b}(t)$ 作為計價單位所導引出的遠期交換機率測度 $Q^{a,b}$ 下，交換率 $S_{a,b}$ 可以透過近似 LMM-SMM 過程而得到以下的隨機過程：

$$dS_{a,b}(t) = \sigma_{a,b}V(t)S_{a,b}(t)^\beta dZ_{a,b}^{a,b}(t) \tag{5}$$

$Z_{a,b}^{a,b}$ 為 $Q^{a,b}$ 測度底下的標準布朗運動，而交換率的瞬間波動度和交換率與波動度間的相關係數矩陣分別為

臺灣大學學術期刊資料庫

$$\sigma_{a,b} = \sqrt{\sum_{k=a+1}^{b}\sum_{h=a+1}^{b}\gamma_k(0)\sigma_k\gamma_h(0)\sigma_h\rho_{k,h}} \tag{6}$$

$$\rho_{a,b}^{V}\sigma_{a,b} = \sum_{j=a+1}^{b}\gamma_j(0)\sigma_j\rho_{j,V} \tag{7}$$

其中

$$\gamma_j(t) = \frac{\partial S_{a,b}(t)}{\partial F_j(t)}\frac{F_j(t)^{\beta}}{S_{a,b}(t)^{\beta}} \tag{8}$$

由於我們假設所有的遠期利率皆僅有一個共同隨機波動度因子，所以遠期交換率的波動度之隨機過程如下：

$$dV(t) = -\nu V^2(t)\mu_t^{a,b}\big(\gamma(t)\big)dt + \nu V(t)dW^{a,b}(t) \tag{9}$$

$$\mu_t^{a,b}\big(\gamma(t)\big) = \sum_{k=a+1}^{b} w_k(t)\mu_t(\gamma(t),k)$$

經複雜運算處理後即可得到 SABR-LMM 模型下到期期限為 T_a、契約期間為 $T_b - T_a$ 的利率交換選擇權之隱含波動度公式：

$$\sigma_{SABR-LMM}\big(\bar{V}_0^{a,b}\sigma_{a,b}, \beta, \rho_{a,b}^{V}, \nu, S_{a,b}, K, T_a\big)$$

$$= \frac{\bar{V}_0^{a,b}\sigma_{a,b}}{\big(S_{a,b}K\big)^{\frac{(1-\beta)}{2}}\left\{1 + \frac{(1-\beta)^2}{24}log^2\left(\frac{S_{a,b}}{K}\right) + \frac{(1-\beta)^4}{1920}log^4\left(\frac{S_{a,b}}{K}\right) + \cdots\right\}} \cdot$$

$$\left(\frac{z}{x(z)}\right)\cdot\left\{1 + \left[\frac{(1-\beta)^2}{24}\frac{(\bar{V}_0^{a,b}\sigma_{a,b})^2}{\big(S_{a,b}K\big)^{1-\beta}} + \frac{1}{4}\frac{\rho_{a,b}^{V}\beta\nu\bar{V}_0^{a,b}\sigma_{a,b}}{\big(S_{a,b}K\big)^{\frac{(1-\beta)}{2}}} + \frac{2-3\rho_{a,b}^{V\ 2}}{24}\nu^2\right]t_{ex}\right\} + \cdots \tag{10}$$

其中

$$z = \frac{\nu}{\bar{V}_0^{a,b}\sigma_{a,b}}\big(S_{a,b}K\big)^{\frac{(1-\beta)}{2}}log\left(\frac{S_{a,b}}{K}\right)$$

$$x(z) = log\left\{\frac{\sqrt{1-2\rho_{a,b}^{V}z+z^2}+z-\rho_{a,b}^{V}}{1-\rho_{a,b}^{V}}\right\}$$

臺灣大學學術期刊資料庫

參、模型參數校準工作

在對標的利率做動態模擬之前，我們必須先對模型的參數進行估計，我們可以利用市場上 Caps/Floors 與 Swaptions 的報價來對模型做校準，然而與傳統 LMM 不同的是，由於 SABR-LMM 模型能夠捕捉到市場上波動度的微笑現象，因此除了價平的價格資訊外，我們還需要不同履約價底下的選擇權報價來對模型做完整的參數校準。

除此之外，過多的估計參數會大幅地拉長模型校準所花費的時間，因此 Mercurio and Morini (2007) 設計了一方法對遠期利率間的相關性 (ρ) 和利率與波動度間的相關性 (ρ^v) 做以下的參數化，減少待估計變數的個數進而提升模型校準的工作效率：

$$\begin{cases} \rho_{i,j} = \dfrac{Cov_{i,j}}{\sqrt{Cov_{i,i}Cov_{j,j}}} \\ Cov = \left[\dfrac{[\theta_{ij} + \bar{\rho}_i^v \bar{\rho}_j^v]}{(\bar{\rho}^v)^{\top}}\middle| \dfrac{\bar{\rho}^v}{1}\right] \\ \theta_{ij} = k + (1-k)e^{-\beta|i-j|} \end{cases} \tag{11}$$

其中 $\rho_{i,j}$ 為所有的相關係數矩陣，包含利率間的相關係數矩陣，與利率和波動度間的相關係數向量 ($\bar{\rho}^v$)。

由於 Mercurio and Morini (2009) 使用單一波動度隨機因子模型，因此所有的遠期利率皆受到共同的隨機波動度影響，而在使用利率 Caps/Floors 與利率 Swaptions 報價校準的過程中，我們無法獨立地針對不同到期期限的遠期利率個別校準，而是必須一次考慮所有模型中的參數，目標為求取一組滿足理論價格與市場價格間的誤差平方和 (Sum of Squared Errors; SSE) 最小的參數估計值，其中 SABR-LMM 模型所必須估計的參數如表 1 所示：

表 1 SABR-LMM 模型參數

LMM Parameters	σ_k、k
SABR Parameters	v、ρ^v、β

最後，我們可以將校準的步驟整理為如下的最佳化求解問題，再以數值方法求解：

臺灣大學學術期刊資料庫

$$\min_{\mathbb{P}}\{SSE\} = min\left\{\sqrt{\sum_{a,b}\sum_{K}\left\{\sigma_{a,b}(K)^{SABR-LMM} - \nu_{a,b}(K)^{Market}\right\}^2}\right\}$$

$$subject\ to: \quad \beta \in [0,1], \quad \nu > 0, \quad -1 \le \rho_k^V \le 1, \quad \sigma_k > 0, \quad \forall k \quad -1 \le k \le 1 \tag{12}$$

在說明本研究使用之校準方式後，下面則是比較文獻不同 SABR-LMM 模型在校準工作及參數設計上的不同之處供讀者參考，並彰顯本研究相對於其他同類模型的優點。Rebonato (2007) 乃是假設與 SABR 校準結果一致作為出發點，從而設計其 SABR-LMM 模型，因此在校準過程中仍須先求出符合 Caplet/Swaption 市場價格的 SABR 部分參數才能依序進行 SABR-LMM 模型的校準，且在 Caplet 的價格校準公式中也僅近似到泰勒展開式的第二階 (Second Order)。

另外在校準參數個數上，Henry-Labordère (2007) 與 Hagan and Lesniewski (2008) 皆假設每個遠期利率有其個別的 β 參數，且由於參數 ρ 控制波動度結構偏斜程度的效果可由參數 β 來調整，因此本研究所使用的 Mercurio and Morini (2009) 模型乃設計共同的參數 β，在不犧牲模型解釋能力之下可達到校準參數數量的簡化。至於在 Swaption 的近似公式比較方面，本研究沿用了 Hagan et al. (2002) 一般代數公式的隱含波動度封閉解，相對於其他模型的做法，在最佳化求解過程中的複雜度也較低，表 2 則是綜合並歸納各 SABR-LMM 模型文獻之結果。

表 2 各 SABR-LMM 模型文獻之校準參數設計及公式

	本文採用模型	Henry-Labordère (2007)	Rebonato (2007)	Hagan and Lesniewski (2008)
參數設計	SABR 部分參數為 N+1 個 *，LMM 部分為 N+2 個	SABR 部分參數為 N+7，LMM 部分為 2N+2 個	依參數形式而不同	未將模型應用於校準工作上
Swaption 校準公式	特定函數	Hyperbolic Cosine 函數	積分解型式	雙重積分解 (Double Integral) 型式

*N 代表遠期利率變數個數

在資料選取上我們主要 Mercurio and Pallavicini (2006) 的數據，使用 2005 年 9 月 28 日的歐元報價市場資料，主要的原因為自 2008 年金融風暴後，選擇權市場中波動度的偏斜狀況與以往傳統的文獻中有所不同，而根據 Rebonato, McKay, and White (2009) 於其著作中提到在不同的市場壓力底下，將會影響波動度產生不同的結構狀態，因此當利率市場分別處於正常或活躍的狀態下，選擇權的價格也會所有不同。因

臺灣大學學術期刊資料庫

此本研究將採用一般價內外隱含波動度較高、而價平附近隱含波動度較低的微笑曲線報價。

在模型校準之前，我們必須先完整地建構出參數估計所需要的市場資訊。表 3 為市場上所觀察到的歐元計價零息債券價格，而這也是我們計算不同到期日之現金流量現值的折現因子。表 4 與 5 分別為價平之歐元利率上限選擇權 (Euro Caps) 與利率交換選擇權 (Euro Swaptions) 之波動度報價。已知利率上限可以拆解為一組不同到期日的利率買權 (Caplets)，因此 Caps 的標的利率為不同到期期限、計息期間三個月的遠期利率 (Forward Rate)；而利率交換選擇權的標的利率亦為不同到期期限與契約期間以及三個月交換一次的遠期交換率 (Forward Swap Rate)。

表 3 歐元零息債券價格

Maturity	*Bond Price*	*Maturity*	*Bond Price*	*Maturity*	*Bond Price*
T_j	$P(0,T_j)$	T_j	$P(0,T_j)$	T_j	$P(0,T_j)$
2005/9/29	0.99994	2010/9/30	0.87028	2025/9/30	0.47625
2005/10/3	0.99971	2011/9/30	0.84144	2026/9/30	0.45679
2005/10/7	0.99947	2012/9/28	0.81213	2027/9/30	0.43828
2005/10/31	0.99806	2013/9/30	0.78224	2028/9/29	0.42057
2005/11/30	0.99628	2014/9/30	0.75248	2029/9/28	0.40378
2006/3/21	0.98959	2015/9/30	0.72317	2030/9/30	0.38799
2006/6/15	0.98424	2016/9/30	0.69447	2031/9/30	0.37283
2006/9/21	0.97792	2017/9/29	0.66645	2032/9/30	0.35841
2006/12/20	0.97192	2018/9/28	0.63928	2033/9/30	0.34471
2007/3/20	0.96576	2019/9/30	0.61274	2034/9/29	0.33170
2007/6/21	0.95929	2020/9/30	0.58773	2035/9/28	0.31932
2007/9/20	0.95286	2021/9/30	0.56352	2045/9/29	0.21730
2007/12/19	0.94641	2022/9/30	0.54031	2055/9/30	0.14918
2008/9/30	0.92579	2023/9/29	0.51812	2025/9/30	0.47625
2009/9/30	0.89842	2024/9/30	0.49671		
2005/9/29	0.99994	2010/9/30	0.87028		

Data Source: Bloomberg ICAU

表 4 價平歐元利率上限選擇權價格（單位：%）

Expiry(Year)	1	2	3	4	5	7	10	12	15	20	30
Cap(ATM)	12.37	18.33	20.51	20.97	20.89	20.45	19.36	18.67	17.72	16.83	15.69

Data Source: Datastream

臺灣大學學術期刊資料庫

表 5 價平歐元利率交換選擇權價格（單位：%）

Expiry/ Tenor	1 Y	2 Y	3 Y	4 Y	5 Y	7 Y	10 Y	20 Y	30 Y
1 Year	21.50	21.90	21.50	21.00	20.40	19.10	17.60	15.30	14.60
2 Y	21.60	21.30	20.70	20.00	19.50	18.50	17.30	15.20	14.70
3 Y	20.90	20.50	19.80	19.20	18.60	17.80	16.80	15.10	14.60
4 Y	20.00	19.60	18.90	18.40	17.80	17.20	16.40	15.00	14.40
5 Y	19.10	18.70	18.10	17.60	17.20	16.60	16.00	14.80	14.30
7 Y	17.80	17.00	16.60	16.20	15.90	15.60	15.20	14.30	14.00
10 Y	15.90	15.20	14.80	14.70	14.60	14.40	14.40	13.60	13.10
15 Y	14.10	13.70	13.50	13.40	13.30	13.20	13.20	12.40	12.00
20 Y	13.20	13.10	13.10	13.10	13.10	13.10	13.10	12.10	11.90
25 Y	12.90	12.90	13.00	13.10	13.10	13.20	13.10	12.20	12.20
30 Y	13.00	13.00	13.00	12.90	12.90	12.90	12.90	12.30	12.30

Data Source: Datastream

在建構出完整的殖利率曲線後，我們可以根據下列 (13)、(14) 式，也就是遠期利率與遠期交換率和零息債券價格間的無套利條件所產生的計算公式，分別計算出目前三個月計息一次的即期遠期利率 ($F_j(0) = F_j(0;T_{j-1},T_j)$，$T_j - T_{j-1} = 0.25yr$，$T_{-1} = 0$)；與不同到期期限、以三個月為單位的即期交換率 ($S_{a,b}(0)$，$T_b - T_a = 0.25yr$)，而此亦分別為利率 Caps 與利率 Swaptions 的價平履約價。

$$F_j(t) = \frac{P(t,T_{j-1}) - P(t,T_j)}{\tau_j P(t,T_j)} \tag{13}$$

$$S_{a,b}(t) = \frac{P(t,T_a) - P(t,T_b)}{\sum_{i=a+1}^{b} \tau_i P(t,T_i)} = \frac{P(t,T_a) - P(t,T_b)}{C_{a,b}(t)} \tag{14}$$

為了讓 SABR-LMM 模型能有對照比較的效果，進而發現該模型的優缺點，本研究乃選擇 Brigo and Mercurio (2006) 的 LMM 模型作為對照模型，並對該模型進行必要的模型參數校準工作，透過兩個模型的對照比較，便能彰顯 SABR-LMM 模型是否真正具備應用的價值。

我們將傳統 LMM 模型校準的結果簡述如下。本文根據 Brigo and Mercurio (2006) 假設遠期利率之瞬間波動度結構具有以下的參數式：

$$\sigma_i = \Phi_i\left([a(T_{i-1} - t) + d]e^{-b(T_{i-1}-t)} + c\right) \tag{15}$$

而參數校準的目標為求取 LMM 模型下利率 Caplet 的理論價格與市場價格間最小價差平方和下的估計值，校準出的結果為 $a = 0.4593$、$b = 1.0241$、$c = 0.1346$、$d =$

臺灣大學學術期刊資料庫

-0.1381，符合市場上波動度具有駝峰 (Hump) 的特性。

在瞬間相關性結構的部分我們使用具有遞減性質的參數式 $\rho_{i,j} = e^{-\phi|T_i - T_j|}$ ，並採用 Brigo and Mercurio (2006) 中 LMM 模型下 Hull and White (1990) 的 Swaption 波動度近似解，所校準出的結果 $\phi = 0.0062$。

如前面所述，由於 SABR 與 SABR-LMM 模型能夠捕捉到市場上的波動度微笑現象，因此僅有價平的選擇權報價無法完整的校準出模型的所有參數，所以我們需要不同履約價下的整個波動度曲面的報價。同樣地，我們能夠使用利率 Caplets 或利率 Swaptions 的價格校準 SABR-LMM 的模型參數。事實上，由於 Caplet 為契約期間為一期的 Swaption，因此校準的方式與 Swaption 一樣可以使用 (10) 式的隱含波動度公式，而本文在此選用市場報價較容易取得的 Swaptions 作為校準的依據。而市場上除了價平的利率交換選擇權為直接報價之外，本研究將非價平的歐元利率交換選擇權之波動度價格整理為直接報價如表 6 所示。

表 6 不同履約價之歐元利率交換選擇權價格（單位：%）

		Strike (Difference between the ATM Strike in bp)							
Expiry	Tenor	-200	-100	-50	-25	+25	+50	+100	+200
1 Year	10 Y	29.11	20.84	18.63	17.97	17.38	17.38	17.81	19.73
5 Y	10 Y	23.80	18.63	17.02	16.44	15.67	15.47	15.37	15.83
10 Y	10 Y	20.79	16.65	15.31	14.80	14.09	13.88	13.69	13.93
20 Y	10 Y	18.96	15.17	13.95	13.47	12.80	12.59	12.37	12.48
30 Y	10 Y	18.34	14.82	13.69	13.25	12.61	12.38	12.11	12.05
1 Y	20 Y	24.75	18.04	16.47	15.76	15.06	15.05	15.45	16.92
5 Y	20 Y	22.23	17.36	15.80	15.23	14.48	14.29	14.20	14.70
10 Y	20 Y	20.19	15.94	14.54	14.01	13.28	13.06	12.88	13.17
20 Y	20 Y	18.21	14.29	13.00	12.50	11.78	11.55	11.33	11.49
30 Y	20 Y	17.76	14.22	13.09	12.65	12.01	11.80	11.58	11.61
1 Y	30 Y	23.77	17.27	15.79	15.07	14.35	14.33	14.73	16.18
5 Y	30 Y	21.75	16.88	15.31	14.74	13.97	13.78	13.69	14.17
10 Y	30 Y	19.83	15.48	14.06	13.52	12.77	12.57	12.42	12.75
20 Y	30 Y	18.10	14.12	12.81	12.30	11.58	11.36	11.16	11.35
30 Y	30 Y	17.69	14.20	13.08	12.65	12.02	11.80	11.58	11.62

Data Source: Bloomberg ICAU

我們將表 5 與表 6 中不同履約價下 Swaptions 的報價繪成圖 5，形成一個波動度價格曲面，由圖中可以看出不同到期期限與存續期間的 Swaptions 波動度價格，幾乎都滿足價平附近的隱含波動度較低、而深度價內外的隱含波動度較高的「微笑曲線現

臺灣人學術論文期刊資料庫

象」，因此可以看出市場上真實的交易現況隱含波動度並非為固定常數。

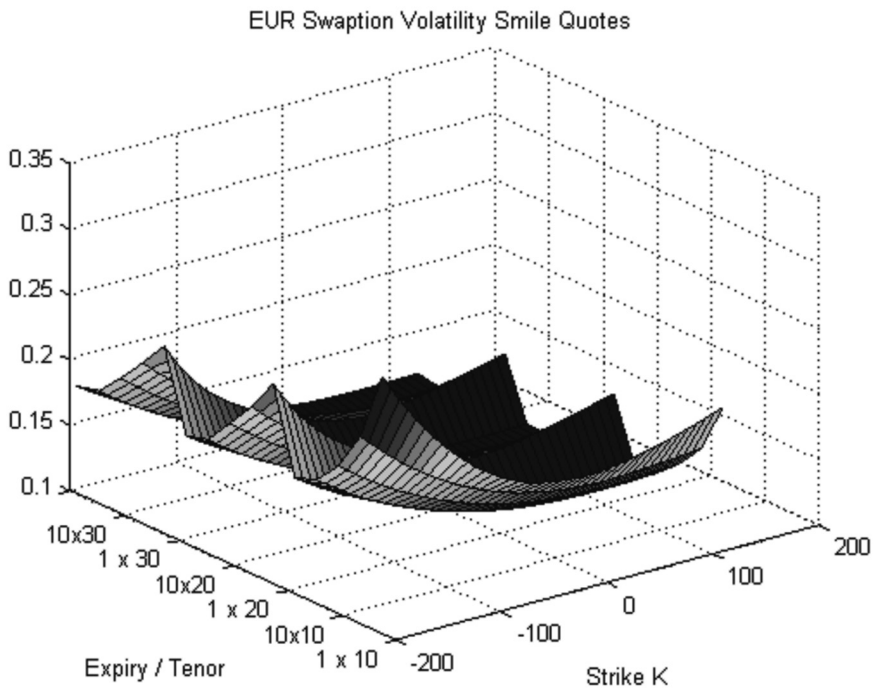


圖 5 利率交換選擇權之市場波動度曲面報價

在模型校準過程中值得注意的是，若需要模擬一組橫跨期間較長的遠期利率（例如 30 年），此時模型所伴隨的待估計參數將非常多，因此最佳化求解的過程將會沒有效率進而耗費非常多的時間，所以無法一次校準完整的波動度曲面。而本研究設計了以下的校準步驟將可減輕參數估計工作上的負擔，簡述如下：

(1) Hagan et al. (2002) 提到 β 參數可以根據先驗經驗而選定，而 West (2005) 的實證分析中也指出 β 值可以事先決定，並不會影響到波動度微笑校準結果，然而由於遠期交換率並非負值，因此本研究選擇 $\beta = 1$ 使模型符合對數常態分配。

(2) 另外，本研究預先猜測一個隨機波動度的波動性參數 v 的初始值 v_0（在此假設 $v_0 = 0.5$），將其固定並代入隱含波動度的公式中。其後便一次針對一條波動度微笑曲線做最佳化的求解，得到遠期交換率為 $S_{a,b}$ 下所伴隨的參數 $\bar{V}_0^{a,b}$ 、$\sigma_{a,b}$ 、$\rho_{a,b}^{V}$ 估計值，重複以上的動作直到完成所有的參數值估計。

(3) 最後，再針對完整的波動度曲面做參數 v 的全域最佳化 (Global Optimization) 校準。

臺灣大學博碩士論文資料庫

圖 6 為我們使用 SABR-LMM 模型所校準出的利率 Swaptions 波動度微笑曲面，可以看出加入 SABR 波動度隨機因子的 LMM 模型，確實可以捕捉到市場上完整的波動度微笑現象。相較於傳統的 LMM 模型，由於波動度為非隨機函數的假設，因此僅能針對單一履約價下的利率 Swaption 進行校準，且不同履約價的變動皆對波動度毫無影響，這點與市場上的實際情況不符，而這也可以看出 SABR-LMM 模型對處理實際市場資訊所隱含的波動度曲面所顯現的優點。

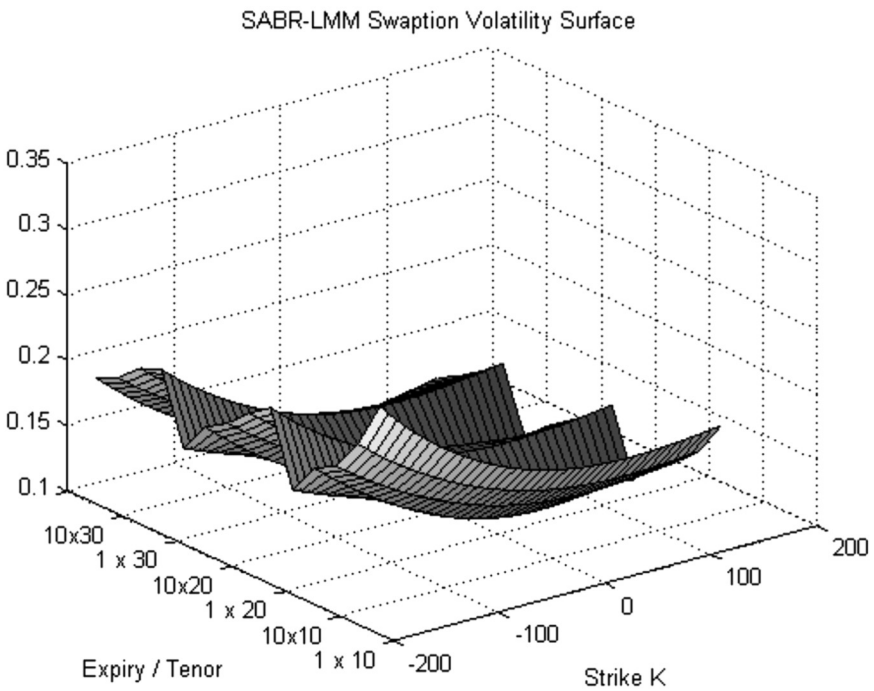


圖 6 SABR-LMM 模型波動度曲面校準結果

而不同模型間的比較我們可以參考圖 7，該圖為 LMM 以及 SABR-LMM 兩種模型分別對 10 年 ×20 年利率 Swaption 所校準出來的結果。其中傳統的 LMM 模型針對價平選擇權所校準出來的結果相當精確，誤差在 10^{-3} 以下。然而如前文所提到的，LMM 無法捕捉到不同履約價底下的波動度變動情況，因此在 LMM 模型下的波動度為一條直線。

當考慮不同履約價下的波動度行為時，SABR-LMM 模型在描述波動度發生偏斜情況時的結果均相當好，該模型皆能夠完整地校準出整條波動度曲線，其中 SABR-LMM 模型在校準完整的波動度曲面時所產生的均方誤差 (SSE) 為 0.0599。除此之外，

臺灣人文學術期刊資料庫

由表 7 之實證結果發現，相較於中間天期的選擇權，對於到期日較短（1 年內到期）或較長（20 年以上到期）的利率 Swaptions，SABR-LMM 模型在校準過程中所產生的誤差皆較大，因此到期日的長短亦會影響到模型校準的能力，而造成的原因根據 Mercurio and Pallavicini (2006) 的發現，他們提出使用 CMS 的價差產品對 SABR 模型進行了凸性調整 (Convexity Adjustment) 的校準工作，將能夠更精確的估計出符合模型的 β 參數值。同樣地，若相同的作法能應用於 SABR-LMM 模型參數校準的工作，相較於本研究事先假定 β 值的方式，相信能得到更精確的模型校準結果，對於捕捉波動度微笑曲面所產生的誤差也能降低許多。

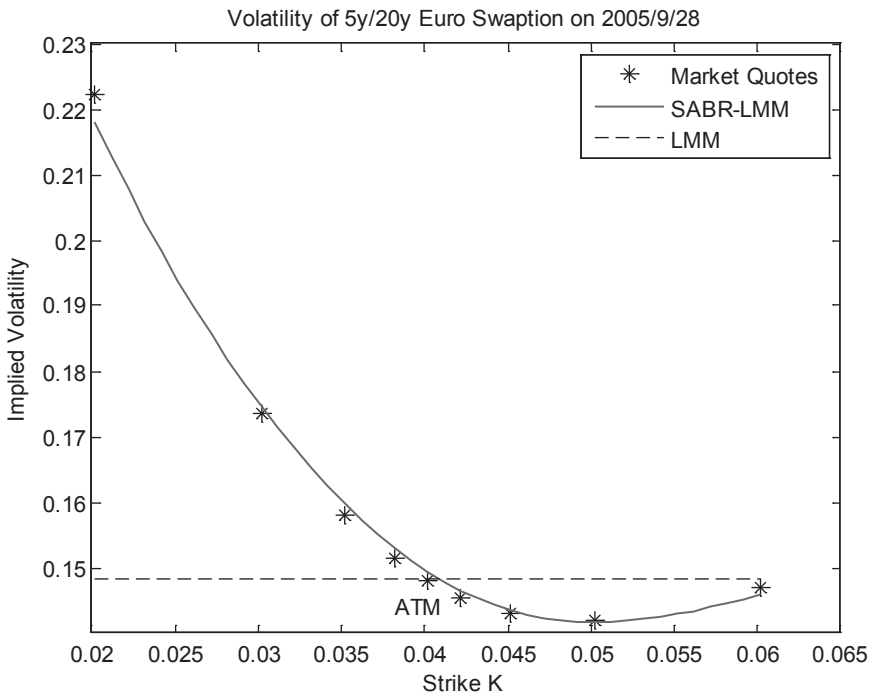


圖 7 不同模型對 10x20 利率交換選擇權校準結果

表 7 SABR-LMM 模型之校準誤差

Tenor/Expiry (year)	1	5	10	20	30
10	0.084	0.017	0.008	0.042	0.042
20	0.055	0.013	0.009	0.045	0.045
30	0.050	0.011	0.011	0.046	

臺灣大學學術期刊資料庫

最後，我們將擷取部分 SABR-LMM 模型校準的參數結果列表於表 8 和表 9，其中共同參數的校準結果為 $\hat{\beta} = 1$、$\hat{v} = 0.445$，而表 8 與表 9 分別為 F_1 至 F_{10} 的波動度調整係數與瞬間相關係數矩陣，其中相關係數矩陣為依照前述 (11) 式參數化後的結果，最後一列（行）為遠期利率與波動度間的相關性，我們由相關係數矩陣中可以觀察出遠期利率與其波動度彼此間皆呈現負相關，而 Wu and Zhang (2006) 中也提到過去的實證文獻此兩者通常為負相關。

表 8 SABR-LMM 模型之波動度調整係數校準結果

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
σ_k	0.400	0.399	0.399	0.226	0.223	0.221	0.219	0.217	0.217	0.216

表 9 SABR-LMM 模型之相關係數矩陣校準結果

Rate/Rate and Rate/Volatility Correlation Matrix											
$\rho^{r}_{i,j}$	1										
	0.827	1									
	0.763	0.827	1								
	0.703	0.728	0.795	1							
	0.693	0.702	0.727	0.805	1						
	0.689	0.692	0.701	0.733	0.805	1					
	0.687	0.688	0.691	0.707	0.733	0.805	1				
	0.686	0.686	0.688	0.697	0.706	0.733	0.804	1			
	0.686	0.686	0.686	0.693	0.697	0.706	0.733	0.804	1		
	0.685	0.686	0.686	0.692	0.693	0.696	0.706	0.732	0.804	1	
$\rho_{k,V}$	-0.400	-0.399	-0.399	-0.177	-0.173	-0.170	-0.168	-0.166	-0.166	-0.165	1

肆、商品評價與分析

在校準完所有的模型參數後，我們可以根據前述 (4)、(5) 式分別模擬出遠期利率與遠期交換率的未來動態路徑，計算出以遠期利率或交換率計價的固定收益商品價值，本研究分別介紹兩種 OTC 市場常見的利率衍生性金融商品：固定期限利率交換 (Constant Maturity Swap; CMS) 與固定期限利率交換利差選擇權 (CMS Spread Option)，並說明該商品於 SABR-LMM 模型下之評價方式。

CMS 為一種特殊的利率交換，契約買賣雙方於未來約定的某固定期間 $T = [T_0, T_1, \cdots\cdots, T_n]$ 內，依照契約上所指定的標的利率交換一系列的利息現金流量。而一般利率交換所選取的浮動端標的利率通常為 3 個月或 6 個月的 LIBOR，然而 CMS 所釘住的利率並非市場上常用的浮動利率或是 LIBOR，而是固定期限的交換利率，且其到

臺灣大學碩博士論文資料庫

期期限必須比利率重設期間長。

假設交換契約所釘住的標的利率為固定期限為 c 的交換利率 (即 $T_b - T_a = c$)，則支付浮動方在每一個利率交換日 T_{i-1} 所必須支付的浮動利率為 $S_{i-1,i-1+c}(T_{i-1})\tau_i$，其中 $S_{i-1,i-1+c}$ 為滿足 (14) 式的交換率。

因此 CMS 於時點 $t = 0$ 的契約價值為（以收取浮動端為例）：

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} P(0,T_{i-1})(S_{i-1,i-1+c}(T_{i-1}) - K)\tau_i\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \tau_i P(0,T_{i-1})\left[E^{i-1}\left(S_{i-1,i-1+c}(T_{i-1})\right) - K\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \tau_i \left(P(0,T_{i-1})E^n\left(\frac{S_{i-1,i-1+c}(T_{i-1})}{P(T_{i-1},T_n)}\right) - KP(0,T_{i-1})\right) \quad (16)$$

其中 $E^i(\cdot)$ 為 Q^i 測度下的期望值函數。在求算 CMS 合約的理論價值時，需計算出 $E^{i-1}(S_{i-1,i-1+c}(T_{i-1}))$ 或 $E^n(S_{i-1,i-1+c}(T_{i-1}) / P(T_{i-1},T_n))$ 的期望值，而這個部分可以使用蒙地卡羅模擬法 (Monte Carlo Simulation) 模擬出遠期交換率的動態過程，經由 (26) 式即可求得 CMS 的理論價值。

表 10 為一個名目本金為 1 億歐元的兩年期 Euro CMS 交易，契約買方於每三個月支付固定利率 2%，並收取浮動利率為兩年期的 Swap Rate。

表 10 兩年期 Euro CMS 2Y Swap 契約條件

Deal Definition			
Deal Type	CMS Swap		
Notional Currency	EUR		
Start Date	2005/9/28		
End Date	2007/9/28		
Coupon Leg Position	Pay	Funding Leg Spread	0%
Coupon Leg Notional	10,000,000.00	Funding Leg Notional	10,000,000.00
Coupon Leg Fixed Rate	2%	Funding Index	2Y Euro Swap Rate
Coupon Leg Frequency	3m	Funding Leg Frequency	3m
Coupon Leg Basis	30/360	Funding Leg Basis	30/360

我們分別以十萬次的蒙地卡羅模擬出每三個月的兩年期固定期限交換率 $(S_{i,i+2yr})(T_i)$, i = 0.25~2)，根據 (16) 式我們可以利用模擬出的兩年期交換率結果算出各期浮動利率的利息折現值，再將契約各期現值流量現值加總後即為商品之理論價格，結果如表 11 所示。

臺灣大學博碩士論文資料庫

一般正常情況契約買賣雙方在承做交易當日契約之價值 (Mark to Market Value) 應為零，即該筆交易為公平契約，因此契約條件往往會在浮動利率端加上一價差 (Spread) 使得商品價值為 0。以上述交易條件為例，訂定浮動利率端加碼 26bp 即可使契約的當日契約之價值為 0。

表 11 SABR-LMM 模型下 CMS Swap 商品評價結果

Fixing Date	Swap Rate	Discount Factor	Funding Leg Cash Flow (PV)	Coupon Leg Cash Flow (PV)	Deal PV
2005/12/28	2.52%	0.9946	250,639.20	- 298,380.00	-203,100.5
2006/3/29	2.60%	0.9891	257,166.00	- 296,730.00	
2006/6/28	2.67%	0.9834	262,567.80	- 295,020.00	
2006/9/28	2.72%	0.9775	265,880.00	- 293,250.00	
2006/12/28	2.77%	0.9714	269,077.80	- 291,420.00	
2007/3/29	2.82%	0.9651	272,158.20	- 289,530.00	
2007/6/28	2.89%	0.9587	277,064.30	- 287,610.00	
2007/9/28	2.94%	0.9523	279,976.20	- 285,690.00	

固定期限利率交換價差選擇權 (CMS Spread Option) 之標的利率為兩個不同天期交換率間之利差，一般為長天期交換率（10 年甚至到 30 年）減短天期交換率（通常為 2 年）。契約買賣雙方會根據對未來利率走勢的看法不同，而產生投機與避險兩種需求。以避險需求說明，若投資人之交易部位分別包含一個支付長天期交換率與收取短天期交換率之 CMS，則當長天期交換率與短天期交換率之利差大過某一水準時，投資人持有利率上限買權 (CMS Spread Caplet) 可提供一個利率價差保護。假設 CMS Spread Caplet 之標的長、短天期交換率分別為 $S_{a,\gamma}$、$S_{\alpha,b}$，$\gamma > b$、履約價為 K 且選擇權履約時點為 T_a，則選擇權的報酬函數如下：

$$max([S_{a,\gamma}(T_a) - S_{\alpha,b}(T_a)] - K,0) \tag{17}$$

因此，CMS Spread Caplet 於時點 $t = 0$ 時的理論價值為：

$$P(0,T_\alpha)\, E^a[max([S_{a,\gamma}(T_a) - S_{\alpha,b}(T_a)] - K,0)] \tag{18}$$

其中 $E^a(\cdot)$ 為 Q^a 測度下的期望值函數。同樣我們可使用蒙地卡羅模擬出兩組遠期利率的動態路徑，包括組成 $S_{\alpha,b}(T_a)$ 的 $[F_{a+1}(T_a),F_{a+2}(T_a),\cdots, F_b(T_a)]$ 與 $S_{a,\gamma}(T_a)$ 的 $[F(a+1)(T_a),F_{a+2}(T_a),\cdots, F_\gamma(T_a)]$ 兩組遠期利率，再根據履約價與遠期利率間的價差來計算選擇權的價值。

臺灣大學學術期刊資料庫

表 12 兩年期 Euro CMS 10Y -2Y Spread Cap 契約條件

Deal Definition			
Deal Type	CMS Spread Option	Interest Basis	ACT/360
Notional Currency	EUR	CMS Convention	USD_Swap_SemiBond
Position	Buy	CMS 1 Tenor	10y
Strike	0.5%	CMS 1 Index	10Y Euro Swap Rate
Notional	100,000,000	CMS 2 Tenor	2Y
Option Start Date	2005/9/28	CMS 2 Index	2Y Euro Swap Rate
Option End Date	2007/9/28		
Caplet Freqency	3m		

Payoff: Max{ (CMS1-CMS2) – Strike,0 }

表 13 SABR-LMM 模型下 CMS Spread Caplet 商品評價結果

Fixing Date	CMS 1 Index	CMS 2 Index	Discount Factor	Caplet Payoff(PV)	Deal PV
2005/12/28	3.48%	2.52%	0.9946	45,849.45	130,847.02
2006/3/29	3.16%	2.60%	0.9891	6,057.38	
2006/6/28	3.25%	2.67%	0.9834	8,275.98	
2006/9/28	3.34%	2.72%	0.9775	11,295.23	
2006/12/28	3.52%	2.77%	0.9714	24,190.37	
2007/3/29	3.37%	2.82%	0.9651	5,098.72	
2007/6/28	3.70%	2.89%	0.9587	30,079.89	
2007/9/28	3.13%	2.94%	0.9523	-	

除此之外，我們將透過 SABR-LMM 模型模擬的兩年後到期的兩年期交換率 $S_{2yr,4yr}$ 以及其隨機波動度之動態路徑繪如圖 8 與圖 9。由圖可以看出不同時點下之波動度具有相對活躍以及相對沉寂的情形。而 Zhu (2007) 提到 SABR 模型的波動度隨機過程並不具有均數復歸的性質，這點也與我們所模擬出的結果大致符合。

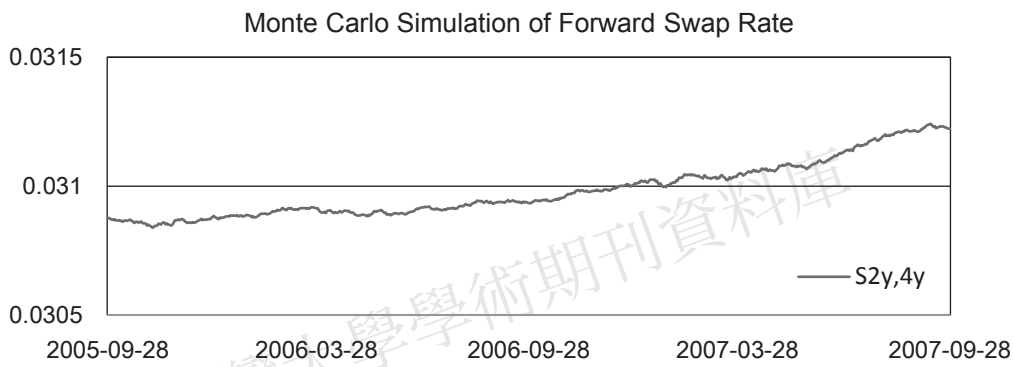


圖 8 SABR-LMM 模型下遠期交換率之模擬結果

臺灣大學學術期刊資料庫

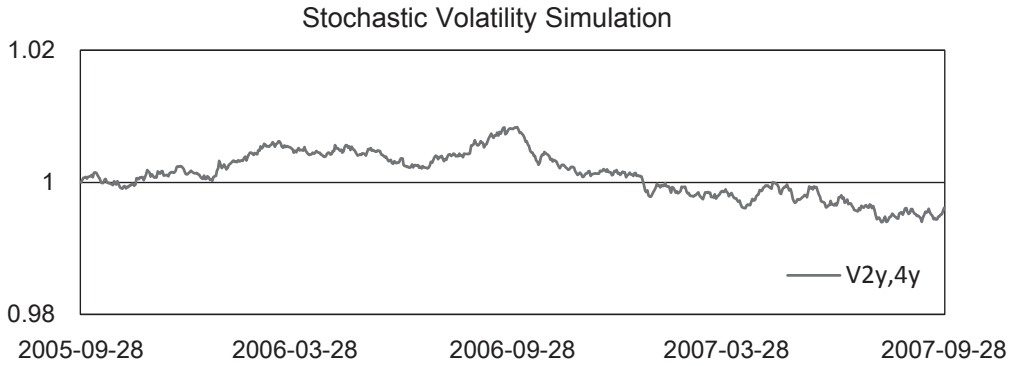


圖 9 SABR-LMM 模型下波動率之模擬結果

在使用 SABR-LMM 模型評價 CMS 相關商品後，為了能提供交易員一個正確方向來判斷利率變動與波動度變動之間的交互作用。以下說明衡量市場主要變數變動對商品價值影響程度的避險比率，在傳統 LMM 與考量隨機波動度 SABR-LMM 模型下之差異。

傳統 LMM 模型在計算 *Delta* 時僅考慮標的利率單獨變動對商品價值所造成的影響，因此隱含著利率與波動度間互為獨立。而實際上利率與其波動度間具有相關性，因此在計算 *Delta* 時應考量波動度因利率變動對商品價值所造成之額外影響。同樣地，在計算 *Vega* 時也應考慮標的利率受到波動度變動的影響而對商品價值造成之損益。

然而傳統的 LMM 卻無法有效的處理上述變數間的連動關係，參考 Bartlett (2006) 所提出 SABR 模型有別於傳統避險比率的概念，我們同樣能夠推導出 SABR-LMM 模型下考慮了隨機波動度之避險比率，茲說明如下：

假設隨機波動度 V 之變動一部分是因為自己的隨機性、而另一部分是受到 $S_{a,b}$ 變動之影響，因此上述受到利率影響的變動幅度係透過 $S_{a,b}$ 之變動量所決定（假設該變幅為 δ_s），則以數學型式可表示為

$$S_{a,b} \rightarrow S_{a,b} + \Delta S_{a,b}$$
$$V \rightarrow V + \delta_s V$$

考慮 SABR-LMM 模型之動態過程如下

$$dS_{a,b} = \sigma_{a,b} V S_{a,b}^{\beta} dZ^{a,b}$$
$$dV = vV dW^{a,b} \qquad (19)$$

(19) 式的設定如同傳統的 LIBOR 市場模型，我們一樣可以考慮以遠期交換率作為指標利率，在 Mercurio and Morini (2009) 的模型中，在基準點現值 $C_{a,b}(t)$ 作為計價單位所導引出的遠期交換機率測度 $Q^{a,b}$ 下，交換率 $S_{a,b}$ 可以透過近似（LMM-SMM 過程）而得到 (19) 式的隨機過程：

臺灣大學學術期刊資料庫

其中 $dZ^{a,b}$ 與 $dW^{a,b}$ 之相關係數為 $\rho_{a,b}^{V}$ ，因此可將隨機波動度動態過程 (19) 改寫為

$$\begin{aligned} dV &= \nu V\left(\rho_{a,b}^{V} dZ_{a,b} + \sqrt{1-\rho_{a,b}^{V}{}^{2}}\, dQ^{a,b}\right) \\ &= \frac{\rho_{a,b}^{V}\nu}{\sigma_{a,b} S_{a,b}{}^{\beta}} dS_{a,b} + \nu V\sqrt{1-\rho_{a,b}^{V}{}^{2}}\, dQ^{a,b} \end{aligned} \tag{20}$$

其中 $dZ^{a,b}$ 與 $dQ^{a,b}$ 獨立，依據 (20) 式我們可得波動度因利率造成之變動幅度 δ_s 為

$$\delta_s V = \frac{\rho_{a,b}^{V}\nu}{\sigma_{a,b} S_{a,b}{}^{\beta}} \Delta S_{a,b} \tag{21}$$

假設以 $S_{a,b}$ 計價之選擇權商品價值函數為 $C = f(S_{a,b},K,T,\sigma(S_{a,b},V(S_{a,b}),K,T))$，其中 σ 為透過 (20) 式校準得到之市場隱含波動度，則 *Delta* 值可更精確的計算如下：

$$\begin{aligned} \Delta C &= \left[\frac{\partial f}{\partial S_{a,b}} + \frac{\partial f}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial S_{a,b}} + \frac{\partial \sigma}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial S_{a,b}}\right)\right] \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial S_{a,b}} + \frac{\partial f}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial S_{a,b}} + \frac{\partial \sigma}{\partial V}\frac{\rho_{a,b}^{V}\nu}{\sigma_{a,b} S_{a,b}{}^{\beta}}\right)\right]\Delta S_{a,b} \end{aligned} \tag{22}$$

觀察 (22) 式可發現當標的利率變動時選擇權之價值除了受到利率單獨變動之影響，還與受到波動度單獨變動之 *Vega* 有關，而影響程度則取決於利率與波動度間之相關程度大小。

同理，我們同樣可以分析標的利率因其波動度變動而變動對商品價值造成之影響，假設利率受其波動度變動之變動幅度為 δ_V，則以數學表示為

$$V \rightarrow V + \Delta V$$

$$S_{a,b} \rightarrow S_{a,b} + \delta_V S_{a,b}$$

透過代數運算即可求得 $\delta_V S_{a,b} = \frac{\rho_{a,b}^{V} S_{a,b}{}^{\beta}}{V}\ \Delta V$，因此我們可以計算出考慮隨機波動度的 *Vega* 值如下

$$\begin{aligned} \Delta C &= \left[\frac{\partial f}{\partial V} + \frac{\partial f}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial V} + \frac{\partial \sigma}{\partial S_{a,b}}\delta_V S_{a,b}\right)\right] \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial V} + \frac{\partial f}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial V} + \frac{\partial \sigma}{\partial S_{a,b}}\frac{\rho_{a,b}^{V} S_{a,b}{}^{\beta}}{V}\right)\right]\Delta V \end{aligned} \tag{23}$$

為了方便說明，我們以表 12 之 CMS Spread Cap 商品為例，計算 SABR-LMM 模型下考慮 10 年期 CMS Rate 單點變動對 Cap 價值影響之 *Bucket Greeks* 值。其中我們可將 (22) 式依序拆解為下列各項分開計算：

臺灣大學期刊資料庫

1. $\frac{\partial f}{\partial S_{a,b}}$ ：為一般未考量利率與波動度間相關性的 *Delta* 值。在此以交換率變動幅度為 1bp 計算，則 10Y CMS Rate 之 Bucket Delta 為$\Delta f / \Delta S_{a,b} = (f_1 - f_2) / \Delta S_{a,b}$= (137,686.82 – 124,007.22) / 2 = 6,839.80，因此僅考慮交換率變動 1bp 時對 Cap 價值之敏感度為 6,839.80。
2. $\frac{\partial f}{\partial \sigma}$ ：為市場隱含波動度變動對商品價值之影響。考量市場波動度結構改變後我們需對模型進行重新校準，才可得到符合改變後波動度結構之模型參數，在此以波動度變動幅度為 1% 計算，則 10Y CMS Rate 之 Bucket Vega 為$\Delta f / \Delta \sigma = (f_1 - f_2) / \Delta \sigma$ = (193,284.81 – 81,109.45) / 2 = 56,087.68，因此僅單一考慮波動度變動 1% 時對 Cap 價值之敏感度為 56,087.68。
3. $\frac{\partial \sigma}{\partial S_{a,b}}$ ：為利率變動對隱含波動度校準值之影響程度。我們以交換率變動 1bp 計算對不同到期期限波動度曲線校準值之影響，詳細結果如圖 10。觀察結果可以發現當選擇權在價內、價外等不同情況之下，對交換率變動之敏感程度也不同，在此我們取接近 Cap 履約價之$\frac{\partial \sigma}{\partial S_{a,b}}$值為 0.0323%。

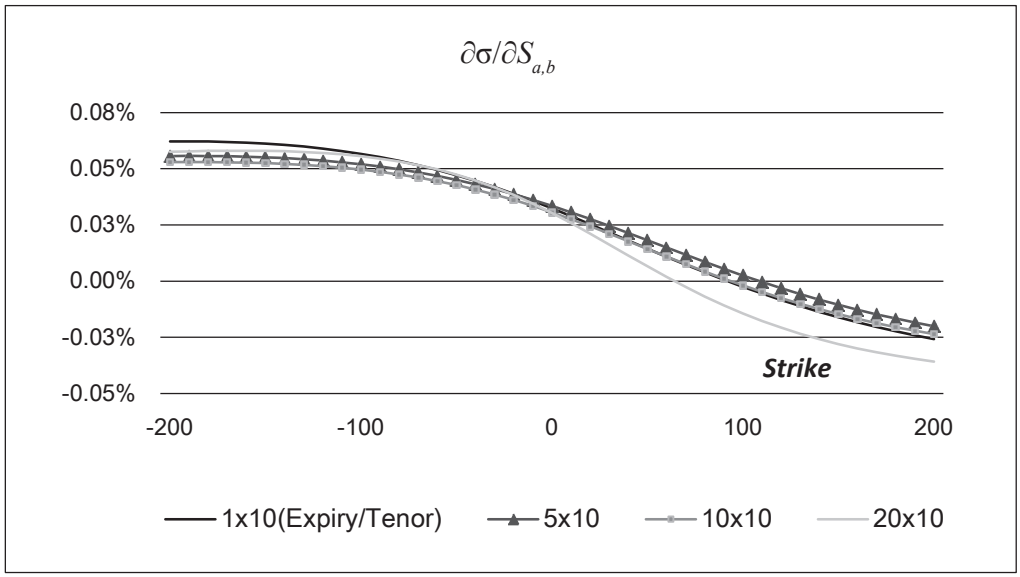


圖 10 SABR-LMM 模型下遠期交換率對隱含波動度之敏感度

4. $\frac{\partial \sigma}{\partial V}$ ：為隨機波動度初始值變動對隱含波動度校準值之影響程度。我們以波動度初始值變動 1% 計算對不同到期期限波動度曲線校準值之影響，詳細結果如圖 11。觀察結果可發現時間價值為影響選擇權對波動度敏感程度的原因之一，越短天期的波動度曲線對隨機波動度初始值之敏感度較高，較短天期的選擇權因時間價值較低，

臺灣人學術論文資料庫

因此標的利率波動的程度成為選擇權之主要價值，故波動度改變對隱含波動度之影響程度較大，且價平附近之敏感度也較價內、外來的高。在此我們同樣選取接近 Cap 履約價之 $\frac{\partial\sigma}{\partial V}$ 值為 0.4846%。

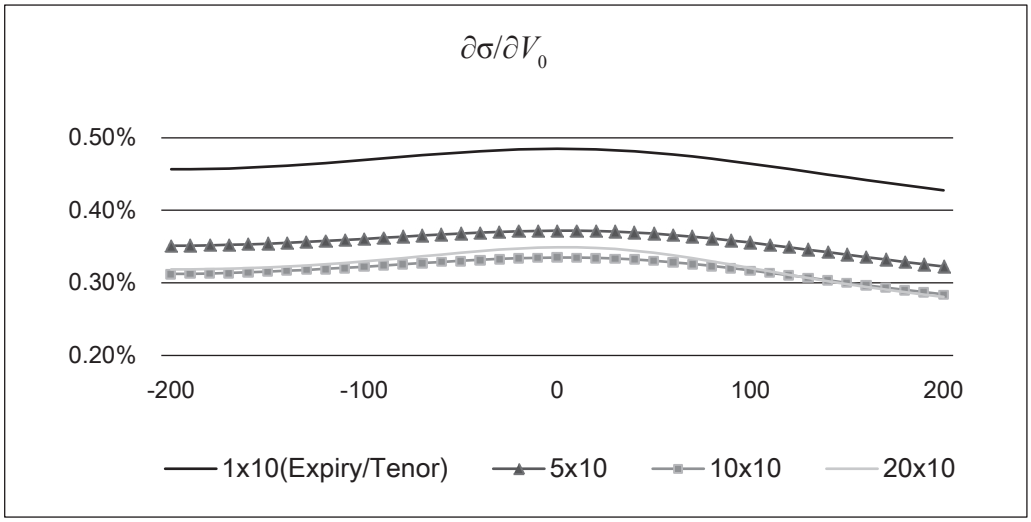


圖 11 SABR-LMM 模型下波動度初始值對隱含波動度之敏感度

5. $\frac{\rho_{a,b}^{V}\nu}{\sigma_{a,b}S_{a,b}{}^{\beta}}$ ：為隨機波動度因交換率改變而造成之變動幅度，我們可透過模型校準參數初始值計算。其中 $\hat{\beta}$ = 1、$\hat{\nu}$ = 0.445、$\hat{\rho}_{a,b}^{V}$ = -0.3082、$\hat{\sigma}_{a,b}$ = 0.2427 及期初交換率 $S_{0,10}$ 為 3.2%，因此經計算後得到 $\frac{\rho_{a,b}^{V}\nu}{\sigma_{a,b}S_{a,b}{}^{\beta}}$ = -17.66，此即為當交換率變動 1bp 時其隨機波動度自初始值改變的程度。

綜合以上各項所述我們可以得知當標的利率變動 1bp 時，因利率與其隨機波動度之間為負相關而造成波動度反向變動，若交易員僅使用一般 *Delta* 來規避標的利率漲跌造成商品價值之損益，則其避險策略將會忽略波動度造成部位之額外暴險，因此仍須加入考量 *Vega* 值。以表 12 之 CMS Spread Cap 商品為例，若僅使用一般 *Delta* 規避利率單獨變動則會造成幅度高達 4,782.41 的過度避險。同理，若僅以一般 *Vega* 值作為規避波動度風險之一具，則根據 (23) 式可計算出幅度高達 270.03 的避險不足。

伍、結論

本研究使用 Mercurio and Morini (2009) 提出的 SABR-LMM 模型評價利率衍生性金融商品，此模型為結合了 Hagan et al. (2002) 的 SABR 隨機波動度模型以及 Brace et al. (1997) 等人於 1997 年所發表的 LIBOR 市場模型。SABR 模型為目前市場上評價簡

臺灣大學學術期刊資料庫

單之型選擇權的主要方法，原因為該模型用於捕捉波動度的偏斜效果以及預測其動態行為上有很好的結果，而且 Hagan et al. (2002) 推導出符合 Black and Scholes (1973) 選擇權評價公式的 SABR 隱含波動度封閉解，因此在一般歐式選擇權的評價與避險工作上便非常有效率。

LIBOR 市場模型主要為實務界中評價複雜利率衍生性商品的主要模型，然而傳統的 LIBOR 市場模型並沒有辦法描繪出實際市場上波動度微笑的現象，因此 Henry-Labordère (2007) 年首次提出結合 SABR 與 LMM 兩個模型的構想，並且推導出遠期利率與隨機波動度的聯合動態過程，往後有許多學者相繼提出不同版本的 SABR-LMM 模型，而本文採用了 Mercurio and Morini (2009) 所發表能夠沿用 SABR 隱含波動度公式的 SABR-LMM 模型，因此繼承了 SABR 模型於實務市場上受到歡迎的特點。

在實證研究的部分我們分別針對了 SABR-LMM 以及傳統 LIBOR 市場模型做參數校準，結果顯示 SABR-LMM 模型亦能夠完整地校準出利率交換選擇權的波動度微笑曲線，因此能夠補強傳統 LIBOR 模型無法測量波動度變動所帶來的影響之弱點。其後我們使用蒙地卡羅法模擬 SABR-LMM 模型中遠期利率具備隨機波動度的動態過程，而我們發現具有隨機性的波動度在動態模擬時更具有彈性，相較於傳統的模型在使用上的自由度也更高，最後我們將 SABR-LMM 模型應用於評價 CMS 與 CMS Spread Option，作為 SABR-LMM 模型可作實際應用工作的證據。由於 SABR-LMM 模型考量了利率與其波動度間之相關性，因此可以更精緻地分析利率商品因市場變數波動造成價值改變的敏感程度，而新的避險比率概念也可作為交易員交易實務上之參考。

然而在模型校準的過程中我們發現，由於 SABR-LMM 模型加入了隨機波動度的動態過程，因此使得此模型所需估計的參數比傳統 LIBOR 市場模型繁複許多，校準過程所花的時間也因此而拉長，特別是針對長天期的衍生性金融商品時，SABR-LMM 模型的評價工作將變得非常沒有效率。因此本研究出並發展出一套獨特的校準工作程序，根據市場上遠期利率近期的歷史行為所反映出的波動度特性，對 SABR-LMM 模型中的波動度調整係數做適當的參數化假設，同時能加速最佳化中搜尋最適解的過程，使該一複雜的模型能減輕一部分的參數校準工作並成功地用實際市場資料進行參數校準，讓整個 SABR-LMM 模型在校準上更具方便性且有效率，並且用數值分析案例驗證了 SABR-LMM 模型在評價利率商品時的可行性與避險比率衡量上的優點。從而可應用該模型對相關利率衍生性金融商品執行定價或避險管理工作，也證明了該模型在實務應用的可行性，相信本研究的研究成果對於國內金融機構在複雜利率衍生性商品的交易實務或避險功過執行應用上會有一定的貢獻。

臺灣大學學術期刊資料庫

Pricing Interest Rate Derivatives with SABR-LMM Models

Shih-Kuo Yeh, Professor, Department of Finance, National Chung-Hsing University

Cheng-Han Yu, Specialist, Market Risk Management and Global Financial Markets Risk Division, CTBC Bank

1. Purpose

The appearance of implied volatility smile or skew has been well documented in the options market. However, it is very difficult to obtain a closed-form solution if stochastic volatility is taken into account. Hagan et al. (2002) present the SABR (stochastic alpha, beta, rho) model to derive an approximate closed-form solution and this model can explain volatility smile or volatility skew phenomenon very well. As a result, the model has become very popular with financial practitioners. This study employs the SABR-LMM (LIBOR Market Model) model proposed by Mercurio and Morini (2009) to price interest rate derivatives. The SABR-LMM model allows stochastic interest rate volatility and provides an approximate closed-form solution to calibrate the interest rate model, a technique better than using traditional Monte-Carlo methodology.

Since the model contains too many parameters and its explicit solution is very complicated, it will involve very inefficient and time-consuming procedures while calibrating the original SABR-LMM model to market data. This study develops a unique procedure to calibrate the SABR-LMM model more efficiently and conveniently. As a result, the work of applying the SABR-LMM model to price interest rate instruments will become faster and simpler.

Moreover, traditional LIBOR Market Models imply that the interest rates changes are independent of volatility changes. In fact, there are significant correlations among these variables' movements. Ignoring these correlations will result in incorrect estimations while calculating hedge ratios. This study tries to derive the relevant hedge ratios while considering the correlations between interest rates changes and volatility changes. This process can provide concrete guidance for traders that they can use to judge the interactions between interest rate changes and volatility changes.

2. Methodology

Prior to pricing interest rate derivatives, many parameters embedded in the SABR-LMM model by Mercurio and Morini (2009) have to be calibrated to market data. The study adopts the following steps to implement an efficient and fast calibration to obtain a set of

臺灣大學學術期刊資料庫

parameters available to conduct the pricing task. Firstly, since some research states that the β parameter in this model might be determined in advance without producing any bias regarding the calibration result, the study sets β equal to 1 so as to let this model match the log-normal distribution. Secondly, this study presumes the initial v value in this model equal to 0.5, which can be substituted into the formula of implied volatilities. Afterwards, we can iterate optimization procedures on each volatility smile curve until every parameter in this model is estimated. Finally, this study conducts a comprehensive calibration on the entire volatility surface to obtain an optimal v parameter based on global optimization.

As all parameters in this model are estimated, this study simulates stochastic processes for forward interest rates and forward swap rates. We set up the process followed by the underlying market variable in a risk-neutral world, then sample paths to obtain the expected payoff. Eventually, we can discount this payoff to price Constant Maturity Swap (CMS) and Constant Maturity Swap Spread Option.

A constant maturity swap is an interest rate swap where the interest rate on one leg is reset periodically, but with reference to a market swap rate rather than LIBOR. A CMS spread option is similar to a regular Cap/Floor option. The difference is that in a regular Cap/Floor, the underlying variable is usually a reference rate, whereas in a CMS spread option, the underlying variable is the spread between the yields of two different swap rates. We choose the two products to be examined because Taiwan's banks typically use these instruments to hedge the relevant interest rate risk.

Eventually, this study calculates various hedge ratios after taking account of the correlation between interest rates changes and volatility changes, a step that better measures the relationship between instrument values and their underlying variables.

3. Findings

The calibration result indicates that the SABR-LMM model can fully capture the volatility smile phenomenon appearing across different strike prices in the swaptions market because the model can allow volatility to be stochastic. However, traditional LMM models cannot deal with the situation where different volatilities correspond to different strike prices. That is because traditional LMM models imply the assumption that volatility is deterministic so they cannot comply with real market data. From the empirical finding, it is obvious that the SABR-LMM model has the advantage of being able to deal with the volatility smile phenomenon embedded in the market data.

Based on the parameters calibrated to market data, we simulate 100,000 paths for future

臺灣大學學術期刊資料庫

movements of forward interest rates and forward swap rates, and compute possible cash flows generated from different derivatives underlying these two interest variables. Then, we can use a specific formula to get an estimate of the interest rate derivative value, which is very difficult to obtain. In addition, this study calculates different kinds of hedge ratios, like delta, gamma and vega under different scenarios. We find that hedge ratios will become either over-estimated or under-estimated if people ignore the correlation between interest rates changes and volatility changes. It means that risk management regarding interest rates will be misleading if the model is not well specified.

4. Research Limitations

According to the empirical result, we find the β estimation errors are more significant on short-term and long-term maturity than medium-term maturity while calibrating the SABR-LMM model to interest rates swaptions. It reveals that the length of the expiration dates indeed has an impact on the accuracy of model calibration. Based on Mercurio and Pallavicini (2006), more accurate β values are available if convexity adjustment can be conducted on the SABR model. Similarly, better β estimation values will be produced if we implement convexity adjustment on the calibration to the SABR-LMM model. Then calibration error will be significantly reduced. However, convexity adjustment involves very complicated and time-consuming procedures when conducting parameters estimation. A good topic for future research will be about how to add convexity adjustment to the SABR-LMM model estimation.

5. Contribution

According to the statistics revealed by Taiwan's Central Bank on June, 2012, the interest rate derivatives constitute the largest share of total transactions in financial derivatives traded in Taiwan. They account for 51.3% of the total trading volume. However, 99.8% of transactions on interest rate derivatives are conducted in the over-the-counter market. Therefore, the SABR-LMM model is very suitable for pricing these types of interest products traded in over-the-counter market. Up until now, there has been few research available using the SABR-LMM model to price Taiwan's exotic interest rate products. Hence, this study is a pioneer research on this aspect of Taiwan and has great application potential to Taiwan's financial practitioners–particularly for those whose expertise is financial engineering or risk management.

臺灣大學學術期刊資料庫

The main contributions of this study are as follows: this study successfully develops a unique procedure to calibrate the SABR-LMM model. The approach will provide Taiwanese traders with an efficient tool to evaluate how much the exotic interest rate derivatives they trade are worth and how far the value of these products can move. The methods provided in this paper can be computed quickly and accurately, and can thus provide traders with a useful guide to pricing the interest rates derivatives. Also, this study considers the correlation between interest rate changes and volatility changes and then derives the relevant hedge ratios regarding interest rate derivatives. This can avoid any misleading risk measurement for every market variable to which it is exposed. This study provides clear and simple guidelines for risk manager with which they can identify the total risk to which the financial institution is exposed when there is a portfolio made up of interest rates derivatives.

臺灣大學學術期刊資料庫

參考文獻

游承翰，2010，***考慮隨機波動度之 SABR-LMM 模型對利率衍生性金融商品之評價***，國立中興大學財務金融系未出版碩士論文，台中，台灣。(Yu, Cheng-Han. 2010. ***Pricing interest rate derivatives products in SABR-LMM model***. Unpublished master's thesis of Department of Finance, National Chung-Hsing University, Taichung, Twiawn.)

Andersen, L., and Andreasen, J. 2000. Volatility skews and extensions of the LIBOR market model. ***Applied Mathematical Finance***, 7 (1): 1-32.

Bartlett, B. 2006. Hedging under SABR model. ***Wilmott Magazine***, 4: 2-4.

Black, F. 1976. The pricing of commodity contracts. ***Journal of Financial Economics***, 3 (1-2): 167-179.

Black, F., and Scholes, M. 1973. The pricing of options and corporate liabilities. ***Journal of Political Economy***, 81 (3): 637-654.

Brace, A., Gatarek, D., and Musiela, M. 1997. The market model of interest rate dynamics. ***Mathematical Finance***, 7 (2): 127-154.

Brigo, D., and Mercurio, F. 2006. ***Interest Rate Models: Theory and Practice***. New York, NY: Springer-Verlag.

Derman, E., and Kani, I. 1998. Stochastic implied trees: Arbitrage pricing with stochastic term and strike structure of volatility. ***International Journal of Theoretical Applied Finance***, 1 (1): 61-110.

Dupire, B. 1997. Pricing and hedging with smiles. In Dempster, M. A. H., and Pliska, S. R. (Eds.), ***Mathematics of Derivative Securities***: 103-111. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Hagan, P. S., Kumar, D., Lesniewski, A. S., and Woodward, D. E. 2002. Managing smile risk. ***Wilmott Magazine***, 5: 84-108.

Hagan, P. S., and Lesniewski, A. S. 2008. ***LIBOR market model with SABR style stochastic volatility***. Working paper, JPMorgan, London, UK.

Henry-Labordère, P. 2007. Combining the SABR and LMM model. ***Risk***, 10: 102-107.

Hull, J., and White, A. 1990. Pricing interest rate derivative securities. ***Review of Finance Studies***, 3 (4): 573-592.

Joshi, M., and Rebonato, R. 2003. A stochastic-volatility, displaced-diffusion extension of the LIBOR market model. ***Quantitative Finance***, 3 (6): 458-469.

Mercurio, F., and Morini, M. 2007. ***No-arbitrage dynamics for a tractable SABR term structure LIBOR model***. Working paper, Banca IMI, Milano, Italy.

臺灣大學學術期刊資料庫

_____. 2009. Joining the SABR and LIBOR models together. ***Risk***, 3: 80-85.

Mercurio, F., and Pallavicini, A. 2006. ***Swaption skews and convexity adjustments***. Working paper, Banca IMI, Milano, Italy.

Piterbarg, V. 2005. A stochastic volatility model with time dependent skew. ***Applied Mathematical Finance***, 12 (2): 147-185.

Rebonato, R. 2007. A time-homogenous, SABR-consistent extension of the LMM: Calibration and numerical results. ***Risk***, 11: 92-97.

Rebonato, R., McKay, K., and White, R. 2009. ***The SABR/LIBOR Market Model: Pricing, Calibration and Hedging for Complex Interest-Rate Derivatives***. New York, NY: John Wiley & Sons.

West, G. 2005. Calibration of the SABR model in illiquid markets. ***Applied Mathematical Finance***, 12 (4): 371-385.

Wu, L., and Zhang, F. 2006. LIBOR market model with stochastic volatility. ***Journal of Industrial and Management Optimization***, 2 (2): 199-227.

Zhu, J. 2007. ***An extended LIBOR market model with nested stochastic volatility dynamics***. Working paper, LPA, Frankfurt, Germany.

臺灣大學學術期刊資料庫

作者簡介

*** 葉仕國**

國立臺灣大學商學博士，現任職於國立中興大學財務金融系教授。主要研究領域為衍生性金融商品、利率模型、信用風險管理。

游承翰

國立中興大學財務金融研究所碩士，現任職於中信銀行全球金融市場風險管理處。主要研究領域為衍生性金融商品評價、模型發展以及風險管理。

本研究感謝中華開發工銀提供相關研究資源以及科技部 NSC 99-2410-H-005-017-MY2 之研究經費贊助。

* E-mail: seiko@nchu.edu.tw

臺灣人壽學術期刊資料庫