臺大管理論叢 2012/12
第 23 卷第 1 期 327-362
DOI: 10.6226/NTURM2012.OCT.R12017

跳躍擴散模型下固定比例債務債券之評價、風險構面與其避險機制

The Pricing, Credit Risk Decomposition and Hedging Analysis of CPDOs under the Lévy Jump-Diffusion Model

江彌修／國立政治大學金融學系副教授
Mi-Hsiu Chiang, Associate Professor, Department of Money and Banking, National Chengchi University

傅信豪／國立政治大學金融研究所博士生
Hsin-Hao Fu, Ph.D. Candidate, Department of Money and Banking, National Chengchi University

王聖元／國立政治大學金融研究所碩士
Sheng-Yuan Wang, Master, Department of Money and Banking, National Chengchi University

Received 2011/8, Final revision received 2012/10

摘 要

本文承接 Dorn (2010) 中信用指數價差服從 Lévy 跳躍擴散模型之假設，提供固定比例債務債券評價之封閉解及其動態避險參數。我們藉由訂立相關風險衡量指標，剖析此商品之風險構面，並建構其動態避險機制。研究結果顯示，信用市場風險平緩的情境下，此商品達成負債目標價之比率偏高，此時投資人雖然有較低的平均資產淨損失，但是其平均增額等候時間也相對增加，隱含投資人因放棄投資於相同給付條件之同等級債券所喪失的機會成本相對提高。當信用指數價差波動增劇，此商品達成負債目標之比率偏低，且因其資產負債之缺口過大而提前出場的機率大增，可能引發投資人蒙受平均資產淨損失甚鉅。本文最後提供此商品之避險成效分析，我們檢測動態避險策略在不同信用市場情境下的績效，並探討避險頻率的長短對其績效之影響。

【關鍵字】信用風險、固定比例債務債券、Lévy 跳躍擴散模型

Abstract

This research follows Dorn (2010) in assuming that credit index spread resembles a Lévy-jump diffusion process, in order to derive the pricing formulae together with the hedging parameters in closed-form for Constant Proportion Collateralized Debt Obligations (CPDOs). By introducing risk measures that are of concerns to credit protection sellers, we analyze the embedded risk characteristics of CPDOs, and propose delta-neutral strategies that are feasible to hedge such products. Our numerical results show that, under a volatile market scenario, CPDOs exhibit low rates in achieving the Target Bond Price, and an increased likelihood of their Cash-out events due to aggravated Shortfalls can provoke substantial losses being incurred to investors. We finalize this research by providing benchmark measures for the proposed hedging strategies under different market scenarios and we discuss the impacts of different hedging frequencies on hedging performances.

【Keywords】 credit risk, Constant Proportion Collaterized Debt Obligations, Lévy jump-diffusion model

臺灣大學學術期刊資料庫

壹、緒論

本文所分析的商品，為 2006 年荷蘭銀行 (ABN AMRO) 所率先推出的信用衍生性創新產品，稱之為固定比例債務債券 (Constant Proportion Debt Obligations；CPDOs)，其目的是為了使擔保債務憑證能同時具備固定收益的性質，並能收取比固定收益高的票面利息。固定比例債務債券是一種信用策略投資組合，結合了一般擔保債務憑證商品結構化的概念與固定比例投資組合保險 (Constant Proportion Portfolio Issuances ; CPPIs) 的反向操作策略之產品。

固定比例投組保險的策略為：透過追蹤信用指數價差 (例如 iTraxx) 來動態調整槓桿係數 (Leverage Ratio)，以決定其於信用市場中賣出一投資組合之信用違約交換 (Credit Default Swaps；CDSs) 的合成型部位 (Synthesized Position)，一般稱之為此商品的主動式部位。進而計算出主動式部位之曝險額，將資金扣除此曝險額後，剩餘資金全部存入無風險之現金帳戶，此部位一般稱之為此商品之被動式部位。此投資策略之特性在於保障本金免於遭受損失，並可追求無限獲利。當信用指數價差縮小時，隱含整體市場之信用風險較低，則調高槓桿係數，擴大主動式部位的曝險額，而多領取之收入即可增加固定收益的利得。

然而固定比例債務債券則反其道而行，其槓桿乘數之動態調整與資產負債之缺口成正比，與負債目標價 (Target Bond Price) 成反比，形成一買低賣高的策略。在信用指數平緩時，降低其主動式部位之曝險額。而在信用指數價差擴增時，則藉由提高槓桿乘數，以增加於信用市場賣出信用違約交換的部位，來收取更多的權利金，使其加速達到負債目標。此策略並不追求無限獲利，它只追求總資產之淨值 (Net Asset Value) 達到其負債面之目標 (Target Bond Price) 即可提早出場 (Cash-out)。意即：當主動式與被動式部位總和之淨值足以沖銷到期債券本金及相關債息與債務，特殊目的機構則出脫其主動式部位之信用投資組合，將之全數投入其被動式部位之無風險資產，商品於此時即免疫於信用風險。

就其風險構面而言，固定比例債務債券與一般擔保債務憑證同質性的部分為：此類商品之主動式部位同樣曝險於其合成型信用資產池之違約風險。但是相較複雜的是，其契約存續期限中動態調整著此信用投資組合，是故其風險面絕對無法用靜態描述的方式捕捉。且因策略具有於底部加碼的特性，隱含當信用指數價差持續低迷，藉由提高信用投資組合之曝險部位以收取更多信用價差的同時，也承擔了一旦信用標的發生叢聚性違約本金將面臨大幅虧損的可能性，得不償失。

此外，投資人買此商品時，特殊目的機構雖允諾其債息之計算基準為浮動利率加上特定之加碼，例如 400b.p.，但是相較於提供相同給付條件之同等級 AAA 債券，固定比例債務債券之投資人雖然領取相同的票息，但此票息中其實包含了因承擔主動式部位曝險於信用違約交換契約所獲取的溢酬。投資人因此必須多等候至達成負債目標

臺灣博碩士論文知識加值系統資料庫

出場，當商品之資產端足以平衡其負債端，才能免疫於信用風險。此多餘等候之時間反映了投資人因放棄投資於相同給付條件之同等級 AAA 債券所喪失的機會成本。

在本文中，我們沿用 Dorn (2010) 中對信用指數價差動態過程服從 Lévy 跳躍擴散模型所作之假設，並藉由 Carr 與 Chou (2002) 分解具上下界障礙選擇權之法則，以一投資組合之片段支付型 (Linear Segments) 選擇權拆解固定比例債務債券具雙出場障礙式支付型態之期望損失，進而推導出其封閉解及動態避險參數。其中，我們藉由 Delta 風險因子解釋此商品存續過程中的標的資產 (資產負債缺口) 價格變動風險，以 Vega 風險因子解釋此商品受資產跳躍波動的風險，而 Theta 風險因子則允許我們捕捉此商品在觸及出場條件前的時間衰退性質。

我們並就投資人所關心之議題，訂立相關風險衡量指標：平均增額等候時間、達成負債目標比率、平均資產淨損失。其中平均增額等候時間衡量投資人相對於持有相同支付條件的同等級 AAA 債券所喪失之機會成本，達成負債目標比率則衡量此商品於不同市場情境之假設下能提早出場的成功率，而平均資產淨損失則衡量條件於商品淨值不足出場時，投資人平均虧損之金額。我們在此研究架構之下，深入剖析商品之風險構面，以期提供投資人確切的風險揭露。

此外，我們相信，任何結構型商品背後所採用的投資策略都有其優劣處，本文的數值結果告訴了我們：在信用市場風險較小時，投資人雖然有較低的平均資產淨損失，且商品呈現較高的達成負債目標比率，但平均增額等候時間卻較長，顯示其機會成本相對墊高；而信用市場風險較高時，雖有些模擬路徑在指數高跳躍幅度下，提早達成負債目標出場，但達成負債目標比率極低，且大部分的路徑都會發生淨值不足提早出場的情形，造成平均資產淨損失增劇。這些結果所共同透露的訊息是，商品之投資策略本身所提供的保護機制並非完美，因此市場是否能提供完備的避險工具及機制，便顯得額外重要。

就建構其動態避險機制而言，投資人所關心的是：是否能透過槓桿調整外的其他方式，提供商品額外的保護，使得此商品在因淨值不足而觸及出場點時，不會僅能領取剩餘資產淨值的一固定百分比。在本文中，我們藉由一選擇權投資組合之建構複製此商品期望損失的支付型態，建構此選擇權投資組合之 Delta 動態避險策略，進而提供其避險成效分析。我們於不同的風險衡量指標下檢測動態避險於不同信用市場情境下所呈現的績效，並且探討頻率的長短對其避險績效的影響。我們的數值結果顯現動態避險機制確有成效，當信用指數價差波動趨緩，降低其避險頻率即可達到避險效果，而當指數價差波動增劇，高頻率地調整動態避險部位則有較佳的避險成效。

我們文章後續之結構安排如下：第貳節為文獻回顧，我們論述信用風險模型於現有文獻中之重要議題。第參節為研究方法，我們建立固定比例債務債券之評價、風險構面、及避險機制的理論架構，進而推導相關封閉解及其動態避險參數，並論述投資

臺灣大學圖書館期刊資料庫

人所關心之風險衡量指標。第肆節為本文之數值結果，我們提供此商品風險構面之分析並進行避險績效之衡量。第伍節為本文之結論。

貳、文獻回顧

固定比例債務債券評價公式之封閉解首先由 UBS Investment Research (2007) 所提出。該文將此商品信用曝險部位 (Risk Exposure；RE) 的報酬率設為有飄移項的布朗運動 (Drifted Brownian Motion)。經由推導之後，可將固定比例債務債券資產淨值的變動表示成以槓桿率 (Leverage Ratio)、信用曝險部位金額，以及必須支付予投資人的利息為參數之指數函數。接著計算資產淨值過程的期望值、變異數及累積機率分配，可以得到任何一時點資產淨值的累積機率分配的封閉解。

此方法的缺點是，其動態槓桿率的求算是由資產與負債的缺口以及契約距到期日的長短所決定。所求得之槓桿率並不具上限 (Upper Bound)，且距到期日越近而遞增，與實務上固定比例債務債券多數具有槓桿上限不符。另外一個主要缺點，是信用指數價差過程並不具有跳躍過程 (Jump Process) 及均數復歸 (Mean Reversion) 的性質，這也與實務上所觀察到的現象不盡相同。

基於此，Joossens 與 Schoutens (2008) 藉由使用多維度列維 (Lévy) 過程，產生多條相關的資產價格動態過程，來模擬固定比例投組保險或固定比例債務債券在信用曝險部位的報酬率。其數值結果顯示，以 VG 過程 (Variance Gamma Process) 取代常態分配後，會使得固定比例投組保險價值低於保本金額的機率增加，同時造成固定比例債務債券發生淨值不足出場的機率增加。作者認為，僅考慮布朗運動的動態過程，會使這兩種商品的信用風險被低估。

Baydar、Di-Graziano 與 Korn (2009) 則提出以隨機最適化的控制方法求出固定比例債務債券中信用曝險部位的最適槓桿率 (Optimal Leverage Ratio)。其方法假設投資人的目標為極大化固定比例債務債券到期時點所能拿回的資產淨值，而時間相依的最適控制變數即為槓桿率之動態過程，如此可解出具有封閉解的最適槓桿率。作者解出的最適槓桿率，為資產淨值之凹函數，這與實務上固定比例債務債券所採用的投資策略不符。一般而言，隨著商品的資產淨值增加，資產負債之缺口因而減少，槓桿率會成正比地降低。為解出封閉解，文中假設信用曝險部位的報酬率為一具飄移項的幾何布朗運動動態過程。類似於 UBS Investment Research (2007) 之評價模型，此文並不考慮均數復歸及跳躍的動態過程，同時假設利率恆為常數。

就商品風險構面之界定與模型風險的探討上，Jobst、Gilkes、Sandstrom、Xuan 與 Zarya (2007) 提出固定比例債務債券的評價會受到模型假設參數細微的變化而產生顯著影響。其中兩個重要的風險指標分別是違約機率 (Probability of Default；PD) 及違約損失率 (Loss Given Default；LGD)。此文並以數值結果說明，信用指數價差波動率

臺灣大學圖書館期刊資料庫

的變動，對於違約機率及違約損失率有顯著的影響，較高的信用價差同時使兩者增加，致使固定比例債務債券更容易發生資產淨值不足而提早出場的情況。

此模型中，界定了固定比例債務債券的四類主要風險：包括違約風險 (Default Risk)、信用指數價差風險 (Spread Risk) 及展期風險 (Roll-over Risk)、流動性風險 (Liquidity Risk) 及利率風險 (Interest-rate Risk)。其中違約風險的描述，採用多因子模型 (Multifactor Model) 以建構其曝險投資組合之損失分配。信用指數價差風險及展期風險部分，則假設信用指數價差為一具均數復歸性質之動態過程。並且將信用價差曲線在 4.75 年至 5.25 年的斜率，設為信用指數價差的函數。此假設是基於市場上觀測之結果，故斜率變動因子在此半年時間中扮演著損失或利得的重要角色。

Cont 與 Jessen (2009) 的文章中，也提到影響固定比例債務債券價格中最重要的兩個風險因子為信用指數交換價差以及指數對應標的資產的違約機率。其中信用指數交換價差的高低決定了固定比例債務債券可產生的現金流入，而價差的波動度則影響了商品資產在展期時按市價計算 (Mark to Market；MtM) 的淨現值。在評估信用曝險投資組合之聯合違約機率分配上，此文採用一綜觀的由上至下 (Top-down) 模型，以避免傳統上採用微觀的由下至上 (Bottom-up) 模型於評價固定比例債務債券時必須面臨的高維度困境 (Curse of High Dimensionality)。作者認為，在評價固定比例債務債券時，僅須綜觀地考量信用曝險投資組合整體的聯合違約機率分配即可，並不需要特別去追蹤投資組合中個別標的資產的信用價差變化。作者選擇以 CIR 短利模型中所採用的均數復歸模型來模擬違約強度的動態過程，利率則維持常數之假設。此篇文章的模擬結果確認了信用指數交換價差之於固定比例債務債券價格的影響，當市場上信用指數交換價差不斷攀升，將造成固定比例債務債券發生淨值不足出場的機率大增。

此類綜觀的由上至下 (Top-down) 模型有其參數校準及市價擬合度上的優勢，相同的思維上，Torresetti 與 Pallavicini (2011) 嘗試使用一般化卜瓦松叢聚損失 (General Poisson Cluster Loss；GPCL) 模型來取代高斯因子聯繫模型 (Gaussian Factor Copula) 以產生信用投資組合之聯合違約機率分配。作者認為，考慮叢集違約會使損失分配的左尾更為肥厚，造成固定比例債務債券評等下降，同時作者假設信用指數交換價差為一個指數瓦西塞克 (Exponential Vasicek) 動態過程，這個動態過程中的參數，長期平均、波動率及均數復歸速度，對價格皆有影響。

與本文屬於同質性的研究上，Dorn (2010) 將 Cont 與 Tankov (2009) 評價固定比例投組保險的模型延伸到固定比例債務債券上，並以 Lévy 跳躍擴散過程跳躍模型描述信用指數價差之動態過程。作者也指出，固定比例債務債券在市場瞬間向下時，資產淨值不足出場的情形比一般預期來得嚴重。本研究接續著作者假設的模型，將之延伸為可適用於每個時點上，並均存在封閉解，可供我們再使用模擬的方式闡述固定比例債務債券的時間相依風險特徵。

臺灣大學圖書館

參、評價、風險構面與其避險機制

本節主要區分為三個小節，第一小節根據 Dorn (2010) 在跳躍擴散的模型假設之下，推導固定比例債務債券的評價公式。第二小節介紹固定比例債務債券的風險構面之衡量，於此，採用選擇權的避險參數捕捉此商品的風險敏感因子，此外，根據此商品設計的出場機制，衍生出三項投資人所關心的風險衡量指標：平均增額等候時間、達成負債目標比率、平均資產淨損失。第三小節則是在第二小節所推導出時間相依的 Delta 函數推導出動態避險下的避險成本以及發生資產淨值不足出場時所獲取之避險收入。

一、固定比例債務債券之評價

我們首先定義符號如下：

Lia_t ：時間點 t 時的負債總額

$TBP(t)$：時間點 t 時的負債目標價

$r(t_1,t_2)$：時間點 t_1 至 t_2 的遠期利率

$r(t)$：時間點 t 的瞬時利率

$C(T_j)$：第 j 個付息時點所需支付的票息

N ：名目本金

Lev_{opt} ：最適的槓桿倍數

$NAV(t)$：時間點 t 時的資產淨值

G：槓桿負載係數

$SF(t)$：時間點 t 時的資產負債之缺口

$RE(t)$：時間點 t 時的信用曝險金額

μ^{TBP} ：負債目標預期報酬

μ^{NAV} ：資產淨值之平均報酬

σ_t ：信用指數波動度

$dW_t \sim N(0,dt)$ ：瞬時布朗運動

$\{N_t\}_{t>0}$ ：卜瓦松過程

Z_i ：第 i 次跳躍幅度之隨機變數

$$1+Z_i = e^{Y_i}\left(Y_i \overset{i.i.d}{\sim} N\left(\alpha,\delta^2\right)\right)$$ 服從對數常態分配

γ ：隨機跳躍密度 (單位時間內平均 γ 次跳躍)

β：跳躍幅度之期望值

$\{S_t\}_{t>0}$ ：服從 Lévy 跳躍擴散過程之信用指數價差

臺灣大學學術期刊資料庫

τ^{in} ：第一次觸及負債目標價的時間點

τ^{out} ：第一次觸及資產淨值不足出場條件的時間點

$B(t, T)$：時間點 t 至到期日的零息債券價格

τ：距到期為止的時間

$V(SF, k)$：資產負債之缺口拆解後的第 k 個選擇權價值

如同於前言中所論述，我們知道此商品對於投資者而言，有兩個至關重要的時間點，其一：商品在達成負債目標時，可以提早結清部位，將所有資產投入被動式部位，其二：當信用市場風險驟增時，隨著違約風險增加而導致的損失，此部分的損失若使資產淨值剩下一成，則商品會領取剩餘價值出場。將此二條件完整定義如下：

定義 3.1：

固定比例債務債券的出場條件：

$$\begin{aligned}\tau^{in} &= \inf\{t : NAV(t) \geq TBP(t)\} = \inf\left\{t : RE^{opt}(t) + B(t,T) \geq TBP(t)\right\} \\ \tau^{out} &= \inf\{t : NAV(t) \leq Threshold\} = \inf\left\{t : RE^{opt}(t) + B(t,T) \leq TBP(t)\right\}\end{aligned} \tag{3.1}$$

其中，τ^{in} 代表第一次觸及負債目標價的時間點，代表主動式部位與被動式部位總額大於此時的負債目標，進而商品在此時能提早將所有金額投入被動式部位，免受信用指數波動之影響。而 τ^{out} 代表第一次觸及淨值不足條件出場的時間點，代表主動式部位與被動式部位淨現值之總額若觸及下限價 (Threshold，通常為期初資產淨值之一成)，則商品於此時提早出場。

而任意時點的信用曝險金額，為決定此商品是否觸及出場條件的關鍵性因素，我們因此建構此曝險金額之動態過程如下：

定義 3.2：

$$Lev_{opt} \coloneqq \frac{TBP(t) - NAV(t)}{TBP(t)} \times G = \frac{SF(t)}{TBP(t)} \times G \tag{3.2}$$

式 (3.2) 隱含：信用曝險金額是受動態調整之槓桿所驅動。其中最適槓桿倍數 Lev_{opt} 為資產負債缺口與負債面之比例，我們闡述其調整邏輯如下：若資產負債之缺口擴大，發行機構應該提高槓桿，在信用市場上承做更多信用違約交換賣方契約，以彌補已實現之損失；反之，若資產負債之缺口縮小，則應降低槓桿，在信用市場上減少承做信用違約交換賣方契約。因此槓桿倍數與資產負債之缺口成正比，與負債目標價成反比。而此式中的 G 是為一負載係數，其越大表示越積極調整槓桿，以期提早達

臺灣人文與社會期刊資料庫

成負債目標。式 (3.2) 允許我們進而定義此商品於任意時點之信用曝險金額部位如下：

性質 3.1：

$$RE := Lev(t) \times TBP(t) = SF(t) \times G = G(TBP(t) - NAV(t)) \tag{3.3}$$

式 (3.3) 中，主動式部位之信用曝險金額可藉由 (3.2) 式推導出，由此可見信用曝險金額的確受槓桿因子驅動，且為資產淨值之函數。為了建構出信用曝險金額之動態過程，我們將負債目標價與資產淨值依下式定義：

定義 3.3：

$$Lia_0 = TBP(0) = \sum_{j=1}^{n} e^{-r(0,T_j)} \cdot C(T_j) N_{T_j} + \left(e^{-r(0,T_n)} \cdot N_{T_n} \right) \tag{3.4}$$

其中 $r(0,T_j)$ 為時點 0 至時點 T_j 之即期利率，而 $C(T_j)$ 為發行機構於發行時允諾之每期票面利率，故負債目標價為每期現金流量之折現值。發行機構發行此商品後，運用現有資產透過信用商品的槓桿操作，追逐此負債目標，一旦達成，即將所有資產投入現金帳戶，此後不承擔信用市場風險。

定義 3.4：

$$NAV(t) = MtM(t) + Account(t) \tag{3.5}$$

$$MtM(t) = \left(S_c(t) - S(t) \right) \times RE(t) \times \sum_{j=1}^{n} B(t,T_j) \exp\left(-\left(\frac{S(t)(T_j - t)}{1 - R} \right) \right) \tag{3.6}$$

其中資產淨值定義為被動式的現金帳戶加上以市值計價 (Mark to Market；MtM) 的合約價值；$S_c(t)$ 表示在時點 t 之合約信用指數價差；$S(t)$ 則是時點 t 之現貨市場上的信用價差；而 $B(t,T_j)$ 為時點 t 至 T_j 的零息債券價格；R 則是發生違約損失時之回復率。由式 (3.6) 可見，隨著時間的前進，發行機構必須計算信用指數造成的依市價調整的獲利或損失，而此獲利或損失會使得指數折現率中，必須反應違約機率之大小。

由上述可見，商品的資產淨值為信用指數價差之函數。在本文中，我們假設信用指數價差之動態過程服從 Lévy 跳躍擴散模型如下：

性質 3.2：

$$\ln\left(S(t) / S(0) \right) = \left(r(0,t) - \beta\gamma \right) t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \tag{3.7}$$

臺灣大學學術期刊資料庫

在建構完之動態過程後，根據定義 3.4 得知，資產淨值為之函數，是故再經由性質 3.1 得知，資產負債之缺口與信用風險曝額皆為資產淨值之函數，因此資產負債之缺口亦為信用指數價差之函數。以下，性質 3.3 推導資產負債之缺口的動態過程：

性質 3.3：

$$\ln\left(SF(t)\middle/SF(0)\right)=G\mu^{TBP}-G(2r(0,t)-\beta\gamma)+r(0,t))\cdot t+G\sum_{i=1}^{N_t}Y_i;r(0,t)=e^{\int_0^t r_s ds}$$

其中，$SF(t)$ 為時點 t 之資產負債之缺口動態過程，G 為負載係數，μ^{TBP} 為負債目標價之報酬率期望值，Y_i 為第 i 次跳躍之跳躍幅度隨機變數。

在推導封閉解過程中，因為觸及兩個出場條件，故其期望損失之支付型態得以一投資組合之片段支付型選擇權拆解其具雙出場障礙式選擇權複製之，我們進而推導固定比例債務債券之期望損失的解析形態如下：

推論 3.1(註 [1])：

$$e^{-r(t,T)\times(T-t)}\cdot E_Q[(SF(T)-0)^+\mid\tau^{in}>t,\tau^{out}>t]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma\tau)^n}{n!}e^{-\gamma\tau}\times e^{-r(t,T)\tau}\sum_{k=-\infty}^{\infty}V(SF,k)$$

$$\text{其中}\,V(SF,k)=\begin{cases}-\left(\dfrac{SF(t)}{U_t}\right)^p\times\left(\dfrac{D_t}{U_t}\right)^{jp}\left[N(d_1)-N(d_2)\right], & k=2j+1\\ \left(\dfrac{U_t}{D_t}\right)^{jp}\left[N(\tilde{d}_1)-N(\tilde{d}_2)\right], & k=2j\end{cases}$$

推論 3.1 指標函數裡的集合即為一雙出場條件，且因出場條件 U_t 、 D_t 與時間有關，可計算出在任意時點 t，期望損失得以用一片段支付型態的選擇權投資組合近似之，且每個時點上的片段支付型態的選擇權都會隨著 U_t 、 D_t 變動。在任意時間點 t，此期望損失之量化數據反映了投資人持有此商品所面臨之下方風險。

二、風險構面

(一) 風險衡量因子

推論 3.1 允許我們對其期望損失做拆解，拆解出一組片段支付型態的選擇權，我們可進而推導出這些片段支付型態的選擇權的希臘參數 (Greeks)，並藉由這些風險因子來描述固定比例債務債券之風險構面。

註 [1] 為避免篇幅過長，我們省略了推論 3.1 詳細的證明。有興趣的讀者可以來信索取相關推導細節。

臺灣大學學術期刊資料庫

推論 3.2：

片段支付型態選擇權的避險參數：

$$Delta(SF,k)=\begin{cases}\left(SF(t)\right)^{p-1}\times\left(\dfrac{D_t^{\,jp}}{U_t^{(j+1)p}}\right)\left\{\dfrac{n(d_1)-n(d_2)}{G\cdot\sqrt{n\delta^2}}+p\left[N(d_1)-N(d_2)\right]\right\}, & k=2j+1\\ -e^{-r(t,T)\tau}\left(\dfrac{U_t}{D_t}\right)^{jp}\left[\dfrac{n(\tilde{d}_1)-n(\tilde{d}_2)}{SF(t)\cdot G\cdot\sqrt{n\delta^2}}\right] & ,\quad k=2j\end{cases}$$

$$Vega(SF,k)=\begin{cases}\left(\dfrac{SF(t)}{U_t}\right)^{p}\cdot\left(\dfrac{D_t}{U_t}\right)^{jp}\left\{\dfrac{4r(t,T)}{\sigma^3}\ln\left(\dfrac{SF(t)}{U_t}\right)+\dfrac{4j\cdot r(t,T)}{\sigma^3}\ln\left(\dfrac{D_t}{U_t}\right)\right\}\\ \cdot\left[N(d_1)-N(d_2)\right] & ,\quad k=2j+1\\ -e^{-r(t,T)\tau}\dfrac{4j\cdot r(t,T)}{\sigma^3}\ln\left(\dfrac{U_t}{D_t}\right)\cdot\left(\dfrac{U_t}{D_t}\right)^{jp}\left[N(\tilde{d}_1)-N(\tilde{d}_1)\right] & ,\quad k=2j\end{cases}$$

$$Theta(SF,k)=\begin{cases}-\left(\dfrac{SF(t)}{U_t}\right)^{p}\times\left(\dfrac{D_t}{U_t}\right)^{jp}\cdot\dfrac{G\mu^{TBP}-G(2r(t,T)-\beta\gamma)+r(t,T)}{G\cdot\sqrt{n\delta^2}}\left\{n(d_1)-n(d_2)\right\} & ,\quad k=2j+1\\ -e^{-r(t,T)\tau}\left(\dfrac{U_t}{D_t}\right)^{jp}\left[(G\mu^{TBP}-G(2r(t,T)-\beta\gamma)+r(t,T))\cdot\dfrac{n(\tilde{d}_1)-n(\tilde{d}_2)}{G\cdot\sqrt{n\delta^2}}-r(t,T)\left(N(\tilde{d}_1)-N(\tilde{d}_2)\right)\right] & ,\quad k=2j\end{cases}$$

推論 3.2 所列出是這些希臘參數的封閉解，推導過程詳見附錄 A。在第四節數值分析時，我們將採用蒙地卡羅法，計算出所有時間點上的希臘參數，並透過敏感度分析，了解此商品的風險構面來源。

(二) 風險衡量指標

1. **平均增額等候時間**

投資人買此商品時，特殊目的機構雖允諾其債息之計算基準為浮動利率加上 400b.p.，但是相較於提供相同給付條件之同等級 AAA 債券，固定比例債務債券之投資人雖然領取相同的票息，但此票息中其實隱含了因承擔主動式部位曝險於信用違約交換契約所獲取的溢酬。投資人因此必須多等候至達成負債目標出場，當商品之資產端足以平衡其負債端，才能免疫於信用市場的風險。此多餘等候之時間反映了投資人因放棄投資於相同給付條件之同等級 AAA 債券所喪失的機會成本。

因此，與持有相同支付條件之同等級 AAA 債券比較，我們將此商品尚未達到其負債目標價之前所需等候之時間定義為增額等候時間。我們採用蒙地卡羅模擬，計算

臺灣大學商學博士論文資料庫

每條資產負債之缺口之路徑觸及負債目標的時間，再將所有路徑觸及的時間點加總取平均，即可得到一平均觸及債券目標價的時間，我們定義其為固定比例債務債券投資人之平均增額等候時間。

2. **達成負債目標比例**

達成負債目標比例則是上方風險的指標，我們在蒙地卡羅模擬法下，可計算出所有資產負債之缺口路徑，有多少的比例能達成負債目標，讓投資人知道此商品能轉換成相同支付條件之同等級 AAA 債券的機會。我們選擇此衡量指標的原因是：投資人希望得知其商品達成負債目標的難易度，而難易度以所有模擬途徑中，成功率的百分比來衡量，投資人則可以清楚知道，此商品是否像發行者所言，能像相同條件之同等級 AAA 債券一樣，每半年穩定收取浮動利率加上 400b.p.。

3. **平均資產淨損失**

平均資產淨損失則衡量投資人於契約持有期間所面臨之下方風險。利用蒙地卡羅模擬的方式，可以算出無法達成負債目標的路徑，持有至到期或提早淨值不足出場之損失，再將所有模擬之損失加總取平均，即可提供投資人在商品觸及下方淨值界線出場及持有至到期還無法達成負債目標時，平均資產之淨損失。

三、動態避險機制

在前一節中我們推導出商品期望損失的片段支付型選擇權複製投資組合，因此可針對投資人所面臨的選擇權價格風險，進行動態避險分析，其避險策略如下所述：

性質 3.4：

$$\begin{cases} SF^{h}(0) = SF(0) + SF(0)\,Delta(0) \\ SF(t) = SF^{h}(t-1)\exp\left(\left\{G\cdot\mu^{TBP} - G\left[2r(0,t) - \beta\gamma\right] + r(0,t)\right\}t + \sum_{i=N_{t-1}}^{N_t} Y_i\right) \\ SF^{h}(t) = SF(t) + \left[Delta(t) - Delta(t-1)\right]\cdot SF(t) \end{cases} \tag{3.8}$$

$$Hedge \quad Income = SF^{out}(t)\cdot Delta(t-1) \tag{3.9}$$

$$Hedge \quad Cost = \begin{cases} SF(0)\cdot Delta(0) \\ Cost(t) = Cost(t-1) + SF(t)\cdot\left(Delta(t) - Delta(t-1)\right) \end{cases} \tag{3.10}$$

式 (3.8) 說明了，在進行動態避險之後，成本會讓資產負債之缺口擴大，因此我們在生成避險後的資產負債之缺口路徑時，必須將此成本納入考量。在進行避險之後，我們也可以計算出在商品資產淨值不足出場時，可以獲得多少避險回饋，稱為避險收

臺灣大學經濟期刊資料庫

入 (Hedge Income) (式 (3.9))。同樣地，過程中所有避險成本 (Hedge Cost) 也必須納入考量 (式 (3.10))。在第四節數值分析中，動態避險頻率會對避險成本造成極大影響，因此我們將討論在不同避險頻率下，對此商品做不同的情境分析。

肆、數值結果與分析

在本節中我們藉由本文第三節所建立之理論架構，對固定比例債務債券進行評價與風險量化分析，並呈現其數值結果。承接第三節中所論述，我們將此商品以一具雙出場障礙式支付型態選擇權複製之，且將此選擇權拆解成 一投資組合之片段支付型的基礎現金或資產無償式的選擇權。為了方便起見，此五個片段支付區間由左至右，我們將之命名為：1. 低履約價之價外現金或無償買權 (Out-of-money and Low Exercise Price Cash-or-nothing Call；OMLCC)；2. 低履約價之價外資產或無償買權 (Out-of-money and Low Exercise Price Asset-or-nothing Call；OMLAC)；3. 價平現金或無償買權 (At-the-money Cash-or-nothing Call；AMCC)；4. 高履約價之價外資產或無償買權 (Out-of-money and High Exercise Price Asset-or-nothing Call；OMHAC)；5. 高履約價之價外現金或無償買權 (Out-of-money and High Exercise Price Cash-or-nothing Call；OMHCC)。 我們將透過數值結果呈現此商品在不同的情境模擬之下的風險構面。此外，藉由這些基礎選擇權的避險參數，我們進而替此商品提供一動態避險機制，並將避險成本一併加入避險的考量，使得此商品得以透過動態調整槓桿之外的方法，提供商品一種保護機制。

一、固定比例債務債券之評價

(一) 商品假設

假設市場上有一固定比例債務債券，如圖 4.1 所呈現，內容為投資人將 $100,000 名目本金付與特殊目的機構 (SPV)，而特殊目的機構將允諾支付投資人每半年 Libor + 400b.p. 的票息，為期十年；另一方面，為達到此目標 (即前節模型設定裡的負債目標價)，特殊目的機構將收到的資金切成兩部分做投資，首先，在期初時，由資產負債之缺口的量乘上槓桿係數，可求得信用資產池市場的風險曝額，依此風險曝額在信用市場乘做賣方契約，領取信用價差，其次，總資產扣掉信用曝額後所剩餘之資金，全數歸入一現金帳戶，以領取浮動之 Libor 利率。然而，隨著時間經過、市場的信用價差的變化，必須動態調整信用風險曝額，原因是：當信用價差擴大甚至有公司違約時，會造成按市值計算的損失，此損失金額必須從現金部位提撥，使得資產與負債之缺口 (Shortfall) 擴大，於此時，採用擴大槓桿倍數，以承做更多信用交換契約來領取賣方權利金收入並彌補按市值計算的損失，反之，則從事相反的動態調整槓桿策略。

臺灣大學圖書館

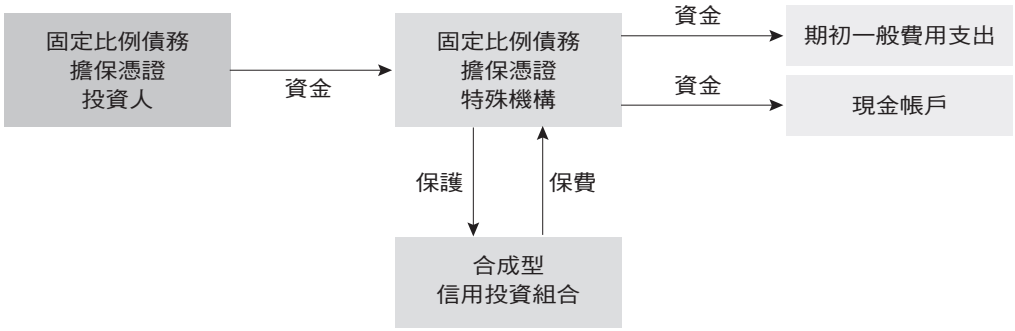


圖 4.1　固定比例債務擔保憑證現金流

資料來源：UBS CDO Research

(二) 模擬結果

如圖 4.2 到圖 4.5 所描述，在相同的隨機跳躍密度 (Jump Intensity)，均為 0.2，不同的隨機跳躍幅度 (Jump Size) 變異下 (分別為 1.7，1.95，2.2)，可模擬出此商品不同的商品淨值走勢，並能知道此商品在什麼時間點會達到負債目標出場 (Cash-in) 或資產淨值不足出場 (Cash-out)。

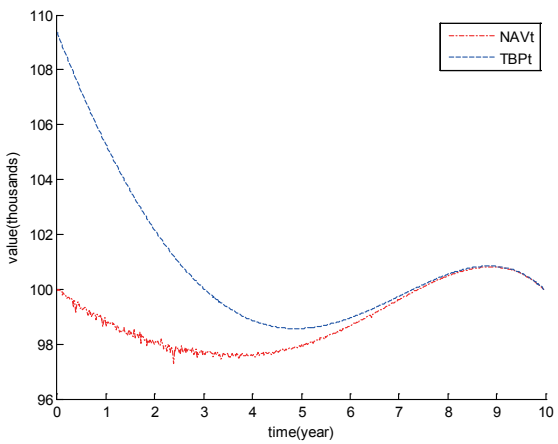


圖 4.2　情境一資產淨值路徑

如圖 4.2 所模擬出此商品的淨值過程，在信用市場價差跳躍密度低且跳躍幅度平均數為負時，此情境下，說明了信用價差指數由高處隨機跳躍至低處，資產與負債之缺口將受惠於信用價差過程的逐漸下降，於 9.5 年時達到目標債券價格而出場。在下一小節中，我們將藉由複製期望損失的選擇權投資組合，更清楚剖析出此商品為何能達到債券目標後出場。

臺灣大學圖書館期刊資料庫

圖 4.3 則為增加隨機跳躍幅度之變異度之情境下所模擬出的商品淨值過程。 因隨機跳躍幅度變異數的增加，信用價差過程中於商品存續期間中發生向上跳躍的機率大增，主動式部位將蒙受損失，進而使得資產負債之缺口擴大。下一小節中的風險構面分析，將進一步剖析出此商品為何最終無法達到目標債券價格，僅能領剩餘資產現值。

於圖 4.4 中，我們再增強隨機跳躍幅度之變異，可觀察到由於信用價差在過程中更可能出現向上跳躍，過程中出現損失且資產與負債之缺口明顯擴大。 在此模擬情境中，商品最終淨值僅能領回 $10,000。同樣地，我們將在下一小節中透過複製期望損失的選擇權組合拆解，進一步分析導致此商品淨值不足出場之肇因。

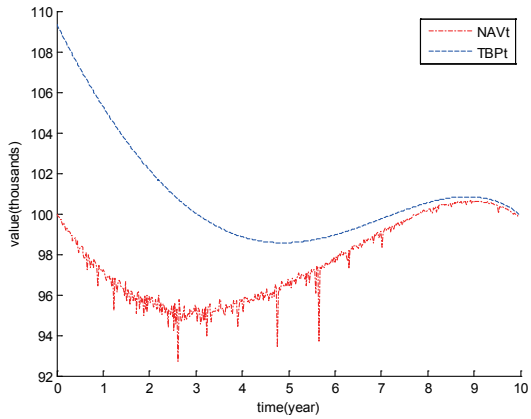


圖 4.3　情境二資產淨值路徑

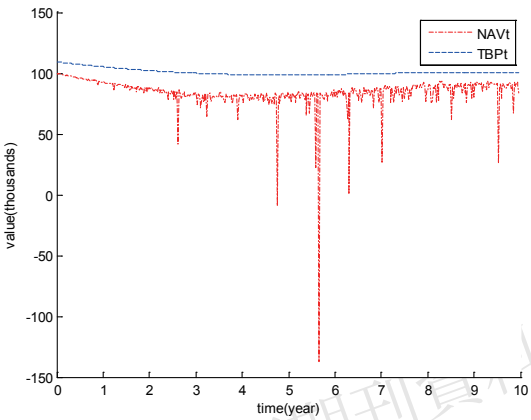


圖 4.4　情境三資產淨值路徑

臺灣大學學術期刊資料庫

二、風險構面分析

承接本文第三節中所論述，我們將具雙出場障礙式支付型態的期望損失，透過 Carr 與 Chou (2002) 所提出的障礙選擇權分解法則，拆解為一投資組合之片段支付型選擇權。接下來，我們將分析這五個選擇的價性權如何隨著時間變動，並透過選擇權的避險參數剖析出選擇權在價內價外各承擔了什麼風險，進而影響了期望損失，使得商品提早出場或是直到到期日領剩餘資產淨值。

(一) 風險因子敏感度分析

如圖 4.5 所示，在情境為隨機跳躍密度為 0.1、隨機跳躍幅度變異數為 1.7 下，可看出缺口金額在 3 年過後，跨出了價平現金或無償買權的區間，使得此買權變成價外。此時，價外低履約價格資產或無償買權變成價內。時間繼續前進的過程中，雖缺口金額走勢持續往價外低履約價現金或無償買權的區間前進，但始終無法跨入此區間。圖 4.6 則更清楚顯示，這些複製的選擇權投資組合，隨著時間經過的價格增減過程。再下來，我們將進一步藉由避險參數所反映出的選擇權價性，來解釋在此情境下，於 9 年時即達到目標債券價格出場的原因。

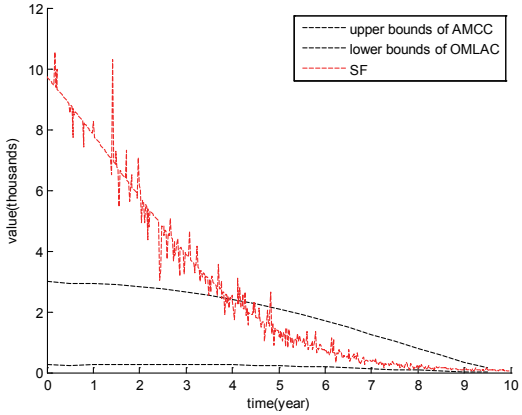


圖 4.5　情境一資產負債之缺口路徑

首先，我們先觀察 Delta 因子的變化過程。賣出低履約價之價外現金或無償買權為一現金流入，因為資產負債之缺口往此選擇權的價內移動，反應在 Delta 風險中即為資產負債之缺口變化乘上 Delta 值。由圖 4.7 可發現，此選擇權在契約前期的確因為價格變動，導致資產負債之缺口可能在此選擇權的價內外跳躍，故其 Delta 函數亦在此時段內有劇烈跳躍現象。因此低履約價之價外現金或無償買權在此期間內價格變動甚鉅，但繼續持有至達成負債目標時，會因資產負債之缺口繼續往價外移動，使得 Delta 函數不再跳躍而免於價格變動風險。

臺灣大學管理論叢期刊資料庫

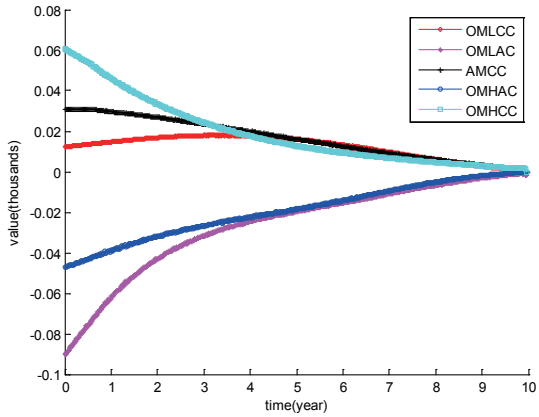


圖 4.6　情境一之選擇權價值

其次，圖 4.8 中低履約價之價外資產或無償買權的 Vega 因子也在過程中價格變動甚多。原因在於，此選擇權在期初時，是屬於價外選擇權，但受到資產負債之缺口走勢逐漸往此選擇權的價內移動的過程中，此選擇權反而具有價值。由於資產負債之缺口從期初在價外，到 3 年時轉成價內，因此買入此選擇權可獲取從價外變價內後，履約價值的增加，在高跳躍波動的環境下，使其權利金增加，在 4 至 10 年間，買此選擇權的人都能因為波動度風險而增加了履約價值。

最後，我們將透過圖 4.9 Theta 因子來了解這些選擇權的時間衰退性 (Time Decay)。在高履約價之價外現金或無償買權，期初我們賣此部位的選擇權時，希望時間價值衰退迅速，當賣方的投資人才能獲利，隨著資產負債之缺口漸往深價外移動，時間價值的確衰退得很快 (反映著再次回到價內機率極低)，使得期初前幾年，此選擇權賣方會獲取 Theta · Δt 利得。總和所有選擇權造成的風險，賣出低履約價之價外現金或無償買權在前期因為資產負債之缺口路徑在此選擇權價內外反覆跳躍，造成此選擇權價格變動甚鉅。但繼續持有至出場時，反而因路徑往深價外移動而免於價格變動風險。而過程中，低履約價之價外資產或無償買權讓我們獲取波動度風險利得。高履約價之價外現金或無償買權則是讓我們賺取了時間價值，最終使得投資人能因這些現金流入而提早出場。

臺灣大學學術期刊資料庫

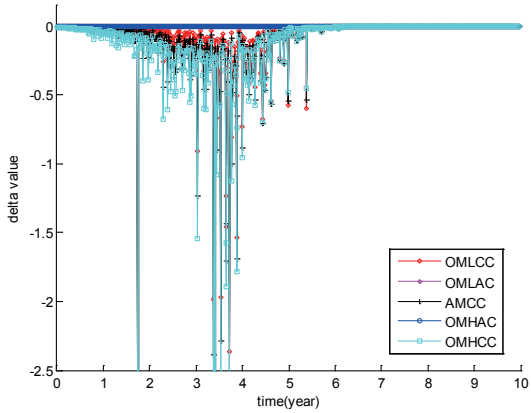


圖 4.7　情境一選擇權之 Delta 因子

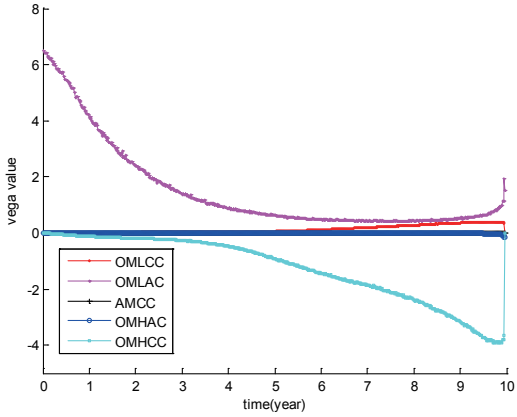


圖 4.8　情境一選擇權之 Vega 因子

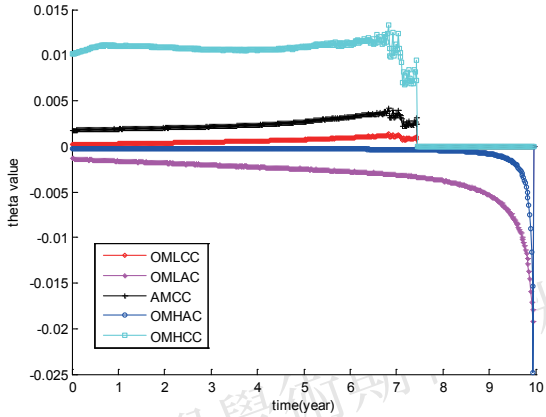


圖 4.9　情境一選擇權之 Theta 因子

臺灣大學管理論叢資料庫

接下來所分析的情境為隨機跳躍密度為 0.1、隨機跳躍幅度變異數為 1.95 下，模擬資產負債之缺口路徑，如圖 4.10，可看出資產負債之缺口在 6 年過後，跨出了價平現金或無償買權的區間，使得此買權變成價外。於此時，低履約價之價外資產或無償買權變成價內。圖 4.11 則是能更清楚的看到，影響著期望損失的這些選擇權，隨著時間經過的價格過程，但此過程僅為價格變動的總效果，因此我們將透過避險參數加上這些選擇權的價性，來解釋此情境下，在到期時還無法達成負債目標出場的原因。

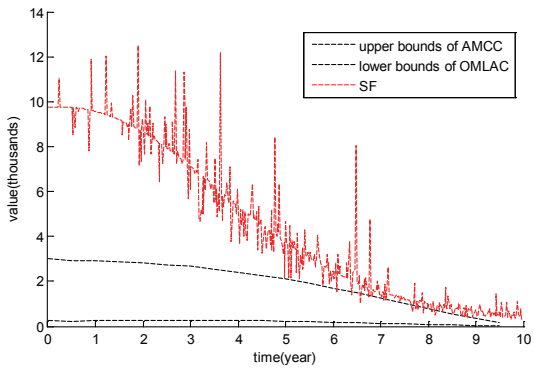


圖 4.10 情境二資產負債之缺口路徑

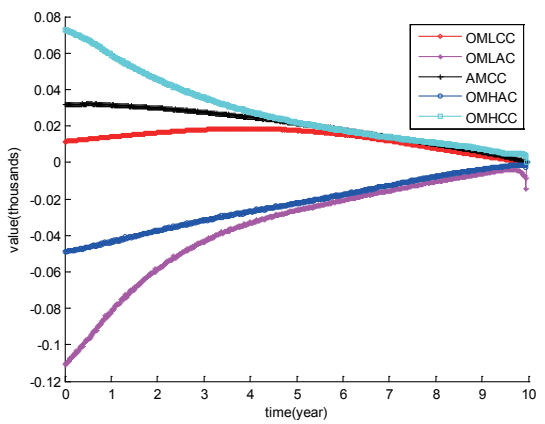


圖 4.11 情境二之選擇權價值

首先，先看到圖 4.12 所有選擇權的 Delta 因子的變化過程，價外低履約價格的現金或無償買權也在過程中，Delta 函數跳躍較情境一更為增劇，原因在於此選擇權在期初時，是屬於價外選擇權，受到資產負債之缺口走勢逐漸往此選擇權的價內移動的過程中，資產負債之缺口反覆在此選擇權之價內外跳躍，加上跳躍幅度變異數增大，

臺灣博碩士論文資料庫

導致路徑中跳躍情形更為顯著。與情境一相似的是：當繼續持有此商品至到期時，將因為資產負債之缺口路徑往所有選擇權價外移動而不再跳躍，免於價格變動風險。

其次，我們看到圖 4.13 中低履約價之價外資產或無償買權，由於此選擇權在期初時屬於價外選擇權，到 5.5 年時轉成價內，在高跳躍波動的影響下，買選擇權的投資人將受惠於波動度增加，使其獲取波動度風險，從圖 4.13 更能看出，在 0~5.5 年間，買此選擇權的人都能因為波動度風險而增加了獲利。時間過了到 5.5 年後，因為此選擇權又從價內逐漸變成價外，使 Vega 因子所帶來的獲利明顯驟降。

最後，我們將透過圖 4.14 的 Theta 因子來了解這些選擇權的時間衰退性，在履約價高之價外現金或無償買權，期初我們買此部位的選擇權時，希望時間價值不要衰退，身為賣方的投資人才會獲取時間價值，隨著資產負債之缺口漸往深價外移動，時間價值的確衰退至零，因為反映著再變回價內的機率變化不大，故選擇權賣方必定能獲取時間價值，但與情境一比較 (圖 4.9)，其時間價值衰退至零，導致此情境下，在到期前還無法達成負債目標。再綜合 Delta 風險，擁有此複製的選擇權投資組合，只要持有至到期，將不受價格變動風險；而高履約價之價外現金或無償買權會有 Theta · Δt 的利得。但相對於第一個情境，從圖 4.14 與圖 4.9 比較，因時間衰退情形趨緩，故在此情境下，達成負債目標會往後延，甚至超過到期期限。

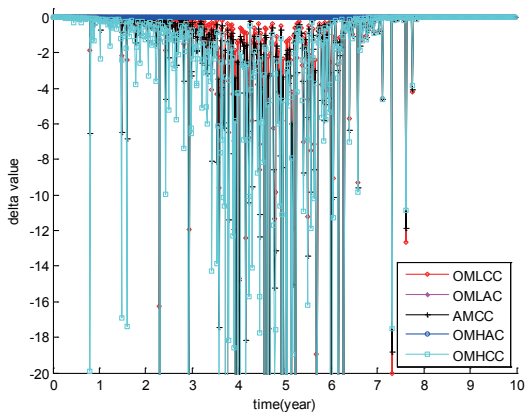


圖 4.12　情境二選擇權之 Delta 因子

臺灣大學學術期刊資料庫

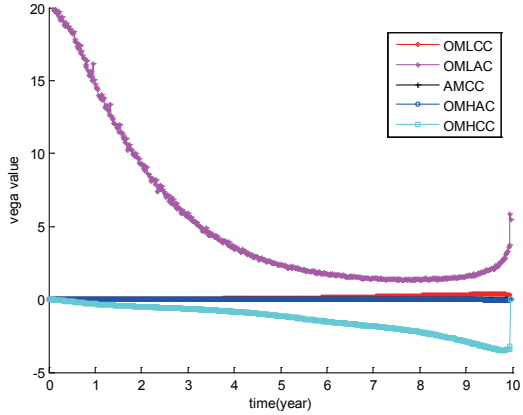


圖 4.13　情境二選擇權之 Vega 因子

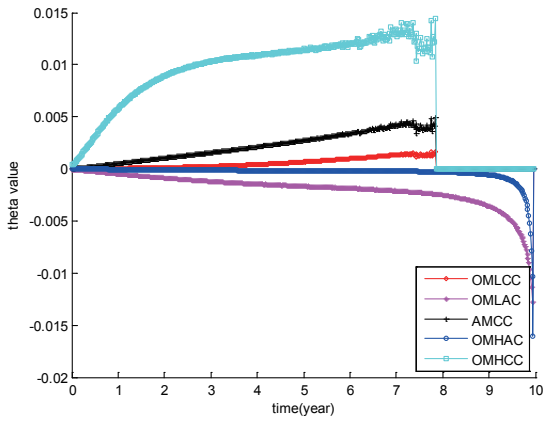


圖 4.14　情境二選擇權之 Theta 因子

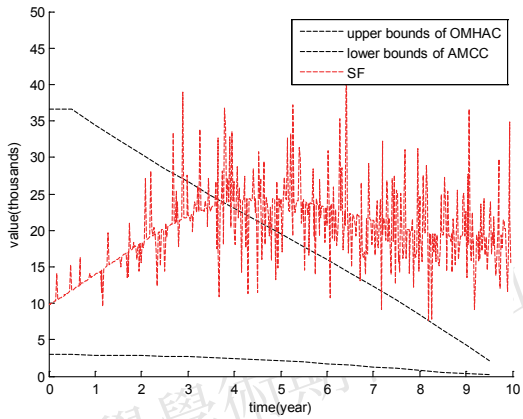


圖 4.15　情境三資產負債之缺口路徑

臺灣大學學位論文庫

接下來所分析的情境為隨機跳躍密度為 0.1、隨機跳躍幅度變異數為 2.2 下，模擬資產負債之缺口路徑，如圖 4.15，可看出資產負債之缺口在 3 年過後，跨出了價平現金或無償買權的區間，使得此買權變成價外。於此時，高履約價之價外資產或無償買權變成價內。圖 4.16 則是能更清楚地看到，複製損失支付函數的這些選擇權，隨著時間經過的價格過程，但此過程僅為價格變動的總效果，因此我們將透過避險參數加上這些選擇權的價性，來解釋此情境下，在到期時僅剩於約 5 成 (如圖 4.4) 價值的原因。

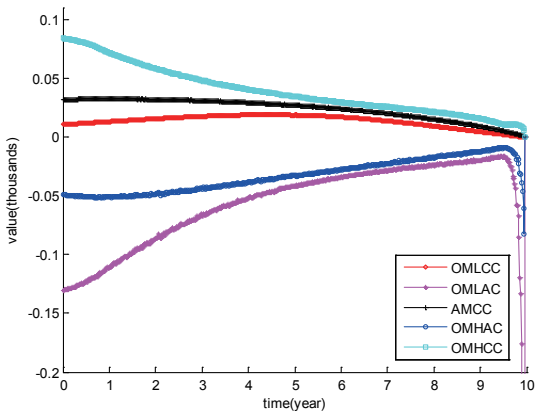


圖 4.16　情境三之選擇權價值

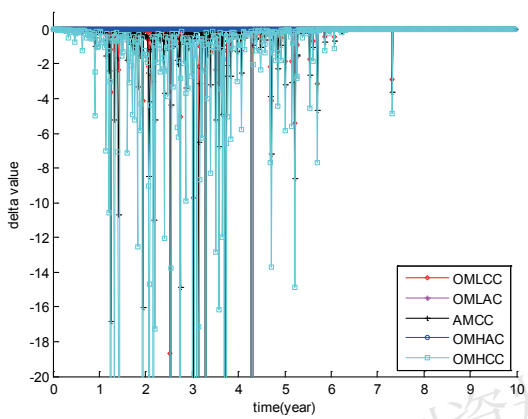


圖 4.17　情境三選擇權之 Delta 因子

臺灣大學學術期刊資料庫

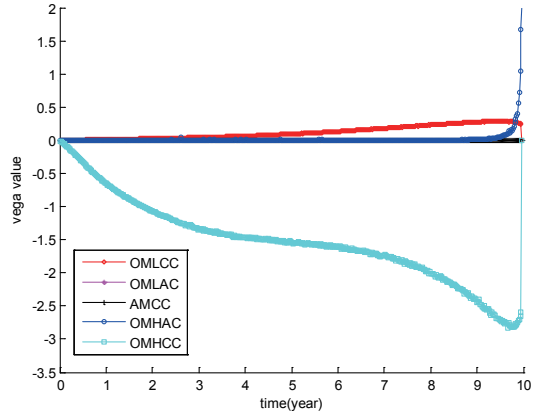


圖 4.18　情境三選擇權之 Vega 因子

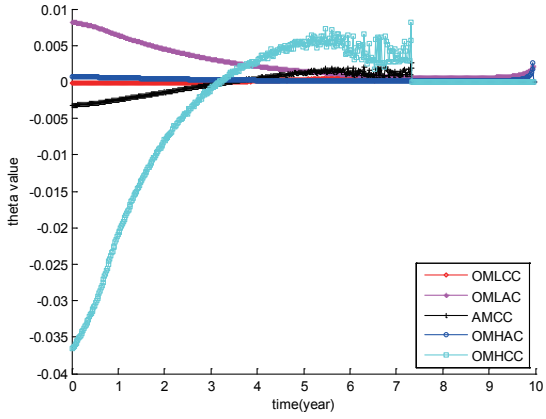


圖 4.19　情境三選擇權之 Theta 因子

首先，圖 4.17 顯示所有選擇權的 Delta 因子的變化過程，賣出價外之現金或無償買權為現金收入 (減少期望損失)，因資產負債之缺口在 0~5 年間跳躍於選擇權的價內與價外，導致此選擇權會因 Delta 跳躍在淨值不足提早出場時，蒙受價格變動風險而認列損失，此狀況與信用風險較小的情境一與情境二有著極大的差異性。

其次，當我們看到圖 4.18 中，賣出高履約價之價外現金或無償買權，受到資產負債之缺口走勢逐漸往此選擇權的價內移動的過程中，波動度逐漸增加，導致賣出選擇權會因為有波動度風險虧損，使其淨值不足在 5.5 年提早出場時，必須認列波動度造成之損失。

臺灣大學學術期刊資料庫

最後，我們將透過圖 4.19 Theta 因子來了解這些選擇權的時間衰退性，在高履約價之價外現金或無償買權，期初我們賣此部位的選擇權時，處於價外選擇權僅具時間價值。但時間在 0~5.5 年間，資產負債之缺口變動往此選擇權之價內移動，使得賣此選擇權的人，因為反映著變為價內之機率大增，故時間價值不衰退反而增長，因此 Theta 因子為負，導致賣此選擇權的投資人，沒有獲取時間價值，反而要認列此選擇權變為價內機率大增的損失，所幸在資產負債路徑往此選擇權價外繼續跳躍時，Theta 因子又反映了路徑回價內的機率減少，使 Theta 因子變正，使得持有至出場時，時間價值稍轉為獲利。

(二) 風險衡量指標

1. **平均增額等候時間**

在第四節第一小節的情境下，我們用 2000 條蒙地卡羅模擬法計算出平均增額等候時間以及其標準差，數值結果如表 4.1。

表 4.1　不同情境下的增額等候時間

	跳躍幅度標準差	平均增額等候時間	標準差
情境一	1.70	5.628	1.437
情境二	1.95	5.677	2.305
情境三	2.20	3.591	1.587

從表 4.1 發現，當我們的情境增加信用指數跳躍幅度的變異時，隨著信用指數跳躍幅度變化大，使得此商品所受之信用風險隨之增加，反映在我們的增額等候時間，代表投資人必須等待更多的時間來達成負債目標價。但為何當跳躍幅度變異增加至 2.2 時，投資人的增額等待年限反而縮短？因為情境三資產淨值不足出場極易發生，因此扣除資產淨值不足出場的狀況，能達成負債目標的資產淨值模擬途徑，即是跳躍幅度夠大且方向往上，以致於這些途徑均會比較早達成負債目標價。觀察情境一與情境二可以發現，當時點進行到 5.6 年過後，固定比例債務債券能達到負債目標，因此，複製期望損失的五個選擇權會喪失時間價值，觀察圖 4.9 與圖 4.14，平均而言，5.6 年過後 Theta 因子開始衰退，代表於此時後，越來越多路徑達到負債目標，時間價值歸零，於是 Theta 因子跳躍至零。

2. **達到負債目標比率**

在第四節第一小節的情境下，我們用 2000 條蒙地卡羅模擬法計算出 2000 條路徑中有多少比率能達成負債目標價，數值結果如表 4.2。

臺灣大學學術期刊資料庫

表 4.2　不同情境下的達成負債目標比率

	跳躍幅度標準差	達成負債目標價之比率 (%)
情境一	1.70	96.20
情境二	1.95	70.30
情境三	2.20	6.00

如表 4.2 所述，當我們的情境增加信用指數跳躍幅度，隨著信用指數跳躍幅度變大，使得此商品所受之信用風險隨之增加，反映在我們的達成負債目標價的比率上，投資人很清楚知道在信用指數價差 CDX、Itraxx 只要跳躍範圍擴大，將使得投資人達成負債目標價的機會銳減，從原本接近全數均會達成負債目標 (96.2%)，比照信用市場風險增劇時，僅有 6.00% 的比率能達到負債目標價。綜合平均增額等候時間一起探討，發現在信用指數價差跳躍幅度低時，投資人雖要等候長一點的時間才能達到負債目標價，但卻有較高的成功率；而在信用指數價差跳躍幅度高時，投資人雖能在高風險下享受提早達成負債目標價，但此達成的機會卻是極低。

3. **平均資產淨值損失率**

投資人在投資此商品時，其最大傷害來自於資產淨值不足，僅剩 10% 出場；以及若持有至到期日均無發生資產淨值達到負債目標價的條件與資產淨值不足出場的條件，則到期時投資人能領得之資產現值也比期初投資時低。而這兩類事件，對照單純買同等支付型態的債券，均是投資人多承擔的下方風險。

以下，在第四節第一小節的情境下，我們用 2000 條蒙地卡羅模擬法計算出 2000 條途徑中，上述兩類事件的損失，並以損失率的概念取代絕對金額，數值結果如表 4.3。

表 4.3　不同情境下的平均資產淨損失率

	跳躍幅度標準差	平均資產淨損失率 (%)	標準差
情境一	1.70	3.42	0.17
情境二	1.95	26.73	0.41
情境三	2.20	84.42	0.22

從表 4.3 中可觀察得知，當信用指數價差跳躍幅度變異較小時，投資人平均損率極低，僅佔本金 3.42%，而當信用市場風險擴大，反映在信用指數上即為跳躍幅度變化劇烈，則投資人將深受其害，平均損失率為 84.42%，所有期初投入資產僅剩約 14.58%。

臺灣大學學術期刊資料庫

三、動態避險分析

Delta 動態避險的概念是，當我們買選擇權時，選擇權價格會受現貨價格變動影響，造成價格波動，為規避價格變動風險，可在現貨市場上做反方向的部位，買賣單位即為 Δ，動態避險收入、成本即如第三節第三小節所探討。

在進行動態避險後，投資人在意的是，是否第二節所提及的風險衡量指標，都能反映出投資人受到更好的保護措施，從表 4.4 可以發現，以平均增額等候時間而言，與表 4.1 比較，可發現平均增額等候時間有顯著降幅。原因是，當我們進行動態避險後，在持有選擇權部分的損失，都可以從現貨部位彌補，使得當缺口上升，現貨部位可獲取的報酬可使缺口縮小，使其模擬出的下一期缺口也能得以縮小，於是在所有路徑下，商品都能更早達到負債目標出場。

表 4.4　不同情境下每週動態避險後的增額等候時間

	跳躍幅度標準差	平均增額等候時間	標準差	避險成本	避險收入
情境一	1.70	1.402	3.782	0.006	0.371
情境二	1.95	1.473	4.258	11.819	1.276
情境三	2.20	0.941	3.229	23.140	2.746

表 4.5　不同情境下每週動態避險後的達成負債目標比率

	跳躍幅度標準差	達成負債目標價比率 (%)	避險成本	避險收入
情境一	1.70	74.50	0.006	0.371
情境二	1.95	57.85	11.819	1.276
情境三	2.20	24.85	23.140	2.746

其次，我們從表 4.5 觀察，是否進行動態避險後，投資人能更容易達成負債目標價？從表中得知，在情境一與情境二時，投資人達成負債目標價的比例反而下降。原因是：情境一與情境二，所模擬的信用市場跳躍都是能使缺口路徑從高處跳躍至低處，這樣的路徑對商品而言信用風險相對較低。若我們又去做動態避險，反而浪費了多餘的成本，使得達成負債目標的比例不增反降。在情境三時，動態避險的確使得達成負債目標機會大增，從 6.00% 上升到 24.85%，原因在於，在信用風險增大時，缺口路徑會跳躍至極大 (見圖 4.15)，避險機制會使某些路徑缺口縮小，讓原本某些會淨值不足出場的路徑，反而變成缺口漸趨縮小，進而變成達成負債目標價出場。

最後，投資人最重視的是，真正在面臨淨值不足出場時，避險機制到底對投資人的保護機制，能否讓平均淨值損失率下降？從表 4.6、表 4.3 可觀察出，情境一與情境二平均淨值損失率不減反增，原因在於，原本出場機會相對小的情境一與情境二，造成淨值不足出場時，必須加計避險成本，使其總虧損值上升，平均淨值損失率也因而

臺灣大學財務金融資料庫

增加。

表 4.6　不同情境下每週動態避險後的平均資產淨損失率

	跳躍幅度標準差	平均資產淨損失率 (%)	標準差	避險成本	避險收入
情境一	1.70	22.95	0.39	0.006	0.371
情境二	1.95	37.94	0.45	11.819	1.276
情境三	2.20	76.63	0.32	23.140	2.746

因為我們於避險機制設計時，是每週進行一次動態調整，使其避險成本累積金額將可能造成原本信用風險較小之情境一與情境二徒增成本，因此，我們考慮將動態避險調整期間拉長之後，觀察在信用市場風險較小時，避險頻率的下降，是否會讓情境一與情境二成本下降，使避險策略在提供保護時，也能兼顧避險成本的總額。

從表 4.7 可觀察出，平均增額等候時間雖無法像每週動態調整避險，降幅十分顯著，但在情境一與情境二下，均使平均增額等候時間減少一年以上，再加入達成目標價之比例一起考量，從表 4.8 會發現每半年避險一次，因成本比每週避險降低許多，故達成負債目標之比例將不像表 4.5 受避險成本影響甚鉅。

再之，觀察表 4.9 每半年避險的平均資產淨值損失率，避險成本的下降，將使得淨值不足出場時，不再因為避險頻率頻繁，付出更多成本，使得損失總額過大。每半年調整一次動態避險策略，僅讓信用市場風險小時 (情境一)，若發生資產不足，資產淨值損失率額外付出 3.83% (7.25%-3.42%) 的損失，比每週避險的 22.95% 下降許多。情境二反而因為避險在淨值不足出場時提供的保護，大於平均付出的避險成本，使其平均資產淨值損失率反而得以下降

表 4.7　不同情境下每半年動態避險後的增額等候時間

	跳躍幅度標準差	平均增額等候時間	標準差	避險成本	避險收入
情境一	1.70	4.588	1.858	3.831	0.933
情境二	1.95	4.881	2.352	14.279	1.200
情境三	2.20	4.932	2.955	17.131	5.753

表 4.8　不同情境下每半年動態避險後的達成負債目標比率

	跳躍幅度標準差	達成負債目標價比率 (%)	避險成本	避險收入
情境一	1.70	91.95	3.831	0.933
情境二	1.95	84.90	14.279	1.200
情境三	2.20	46.10	17.131	5.753

臺灣大學學術期刊資料庫

表 4.9　不同情境下每半年動態避險後的平均資產淨損失率

	跳躍幅度標準差	平均資產淨損失率 (%)	標準差	避險成本	避險收入
情境一	1.70	7.25	0.25	3.831	0.933
情境二	1.95	13.28	0.32	14.279	1.200
情境三	2.20	47.34	0.45	17.131	5.753

伍、結論

本文中在假設信用指數為 Lévy 跳躍擴散模型下，利用選擇權複製的概念將其拆解成更基礎的片段支付型選擇權，進而推導出期望損失及其避險參數之封閉解。我們並將評價公式與避險參數延伸至能捕捉時間相依的性質，以符合此商品動態調整槓桿之時間相依的特性。在數值結果的敏感度分析中，我們更藉由避險參數觀察到了價格變動、波動度、及時間衰退的不確定性如何影響固定比例債務債券資產之淨值。

本文的數值結果呈現：在信用市場風險平緩的情境下，當持有其複製選擇權部位至到期日，將不會面對價格變動風險，雖然過程中某些片段支付型態的選擇權，因為資產負債之缺口路徑在價內外跳躍，導致對應之選擇權 Delta 函數亦出現跳躍情形，但若擁有此靜態避險複製之部位，持有至到期，資產負債之缺口路徑最終還是會跳躍至所有選擇權的價外區間，免於價格風險。

同時，於此情境下，模擬信用指數價差之波動度較小，因此模擬之路徑往價外低履約價之資產或無償買權的價內變動，故此選擇權可獲取信用指數跳躍帶來之價值。此外，時間衰退因子則闡述：複製期望損失的選擇權，當持有賣出部位的現金或無償買權之時間衰退因子衰退至零，則此三個選擇權的放空部位，均能使我們確定獲取時間價值，同時也獲取時間價值後，期望損失衰退至零，則所有路徑漸趨達成負債目標價出場。

而在信用市場風險較高的情境中，因商品提早淨值不足出場機會大增，故在前期 Delta 函數跳躍劇烈出場時，勢必面臨認列損失並出場。同時，在信用市場風險較高時，模擬信用指數價差之波動度較大，因此模擬之路徑往價外高履約價之現金或無償買權的價內變動，故賣出此選擇權會因高跳躍之波動度而蒙受損失。此外，時間衰退因子則闡述：複製期望損失的選擇權，賣出部位的價外高履約價之現金或無償買權，因反映著信用市場風險，使持有此選擇權越長時間，越可能發生淨值不足出場之情形，故在信用風險高時，此選擇權反而造成我們在時間價值上無法獲利反而損失。

為了使投資人更清楚了解風險構面，本文進而提供三項風險指標，使投資人在選擇購買此商品時，也能透過此三項指標的情境分析，明哲保身。研究結果發現：信用市場風險平緩的情境下，此商品達成其負債目標之比率偏高 (甚至高達 96.20%)，此時投資人雖然有較低的平均資產淨損失 (-3%~-26%)，但是其平均增額等候時間卻增加

臺灣大學財務金融學系

(5.628 年); 當信用指數價差波動增劇，此商品達成負債目標的比率偏低 (6.00%)，且因其資產負債之缺口過大而提前出場的機率大增，可能引發投資人蒙受平均資產淨損失甚鉅 (-84.42%)。

最後，為了規避價格變動風險，我們透過選擇權常用的動態避險方式，替此商品在調整槓桿外，提供現貨市場的放空機制。而在避險成效分析時，我們透過幾項風險衡量因子去檢測動態避險在不同信用市場情境下的績效，並且探討頻率的長短對其避險績效的影響。藉由蒙地卡羅模擬法模擬出不同的情境下，證實動態避險機制確有成效。模擬結果闡述在信用市場風險高時，應該要考慮動態避險且調整頻率較高 (對風險指標助益較高)，效果較明顯。而在信用市場風險低時，我們應該考慮僅就由動態調整槓桿即可 (降低成本為目標)，或考慮頻率較低的動態避險策略，才能節省避險成本，使風險指標不至於因太多成本反而績效變差。

臺灣大學學術期刊資料庫

The Pricing, Credit Risk Decomposition, and Hedging Analysis of CPDOs under the Lévy Jump-Diffusion Model

Mi-Hsiu Chiang, Associate Professor, Department of Money and Banking, National Chengchi University
Hsin-Hao Fu, Ph.D. Candidate, Department of Money and Banking, National Chengchi University
Sheng-Yuan Wang, Master, Department of Money and Banking, National Chengchi University

Purpose/Objective

The pricing and hedging issues of complex credit structures present great challenges to both academic and industry researchers ever since the 2007 credit crunch. Constant Proportion Debt Obligations (CPDOs) are one such innovation that aims to provide credit-protection sellers with a steady stream of fixed-income cash flows. Yet their cash-outs events during the crisis unfolded risk characteristics that had been previously unseen, and raised questions regarding the causes of rating bias in the first place when such complex instruments had been classified as AAA grades by the rating agencies.

In contrast to the constant proportion portfolio insurance (CPPI), a CPDO aims to generate sufficient cash flows that pay off the coupons during its contract period and the principle upon maturity. This is achieved by conducting a dynamic adjustment rule that increases the synthetic position of selling CDS contracts when the index spread widens. Being a piecewise constant of the asset-liability shortfall, the dynamic leverage factor is increased when losses in the index are encountered, and is decreased when the shortfall narrows.

While the rating agencies have valued CPDOs based on models of high dimensionality for the dependence structure of rating migrations and the credit curves among the underlying credit entities, here we argue that such static models are time consuming and are inadequate in capturing the time-dependent accumulated loss process of such complex products, nor do they provide sufficient help in the analysis of the product's risk profile.

Given above issues, in this research we consider CPDOs as path-dependent derivatives writing on the index spread. We follow Dorn (2010) in assuming that the credit index spread resembles a Lévy-jump diffusion process in order to derive the pricing formulae together with the hedging parameters in closed-form. By introducing the risk measures that are of concerns to the credit protection sellers, we analyze the embedded risk characteristics of CPDOs, and propose delta-neutral strategies that may be feasible to alleviate the effects of sudden index-spread widening on the net-asset-values of CPDOs.

臺灣大學學術期刊資料庫

Design/Methodology/Approach

The net-asset-value which constituents the asset-liability shortfall of a CPDO structure plays a major role when a dynamic leverage rule is conducted. When the net-asset-value exceeds the present value of the CPDO's liabilities, a cash-in event takes place; when falls below a preset limit, a cash-out event occurs. And the leverage rule is applied as long as the CPDO's liabilities outweigh its net-asset-value.

In this research, we identify the main determinant of the CPDO's net-asset-value to be the index spread. The stochastic nature of index spread affects not only the income stream received upon selling CDS contracts, but also the instrument's asset-liability shortfall. We study the pricing, risk quantification, and dynamic hedging issues of CPDOs under a Lévy jump-diffusion setting.

We derive explicit solutions for a portfolio of linear-segment options that replicate the time-dependent double digital knockout barrier-option written on the product's asset-liability shortfall. This enables us to explore, in terms of the associated hedging greeks, the embedded risk characteristics of CPDOs.

In addition, we propose delta-neutral strategies that are feasible to hedge such products. Numerical simulations are subsequently performed to provide benchmark measures for the proposed hedging strategies.

Though incorporating a stochastic interest rate environment could further help to differentiate the compromise between an increase in money market account (asset) and the coupons paid to the investors (liability), it is in fact a minor determinant in the pricing of index-linked instruments. We have therefore assumed a constant term structure of interest rate throughout.

Findings

Our simulation results show that, under a normal market condition, though the option deltas exhibit sudden jumps during the contract period, the replicating option portfolio remains out-of-money, indicating that the asset-liability shortfall is unlikely to deteriorate. On the other hand, CPDOs exhibit low rates in achieving the Target Bond Price under a stressed market scenario.

An increased in the likelihood of their cash-out events due to aggravated asset-liability shortfalls is likely to provoke substantial mark-to-market losses being incurred. Such situation can be made worse, should the deleverage mechanism be initiated, which forces the

臺灣大學學術期刊資料庫

CDPO to unwind its synthetic credit positions in order to limit the over-night losses under a preset “leverage gap”. In this case, substantial realized losses are possible.

While a dynamic leverage rule provides the instrument an opportunity to recover its mark-to-market losses under a stressed market scenario, it at the same time increases the instrument’s exposure to default losses on the underlying credit entities. In the worse case of a continued spread widening, the income effect may not offset the fall in the instrument’s net asset value. In contrast to a normal market scenario, we observe a high rate of cash-out events when the index spread is highly volatile.

Our hedging analysis reveals that, under a stressed market condition, an increase in the hedging frequency results in an decrease in the average net-asset losses of the credit protection sellers, hence reduces the rates of CPDOs reaching their cash-out events. While under a normal market scenario, an increased hedging frequency does not necessary improve the average net-asset losses due to the associated hedging costs, nor does it out-perform, in terms of the arrival-rates of CPDOs in reaching their Target Bond Prices, that otherwise was done based on dynamic leverage adjustments.

Originality/Contribution

In view of the wide criticism that the rating agencies clearly overlooked the possibility of sudden index-spread widening, this research assumed that credit index spread resembles a Lévy-jump diffusion process to account for the effects of sudden index-spread fluctuations on the net-asset values of CPDOs. Our contribution to the existing literature is threefold: First, we provided time-dependent analytic formulae of the valuation of such instruments, together with their hedging parameters; Second, we unfolded the embedded risk characteristics of CPDOs via the hedging parameters; Finally, we provided benchmark measures for the proposed hedging strategies under different market scenarios, and discussed the impacts of different hedging frequencies on hedging performances.

Research Limitations/Implications

Although adopting a dynamic spread model such as the Lévy jump-diffusion is essential in capturing the sudden jump-movements of the index spread being observed, all current valuation models of CPDOs including ours lack in a throughout description of the dynamic state of losses associated with the CDS reference pool. In this respect, incorporating a dynamic loss framework, or a default contagion model may prove to be of help.

臺灣大學學術期刊資料庫

On the other hand, questions with regard to the quantification and management of different types of risks still await proper focus. In particular, how the roles of spread (systematic) and default (idiosyncratic) risks interacts, and how to respectively hedge them with adequately chosen risk measures are still out of reach in current research.

In addition, proper assessments of the impacts of model uncertainty on the pricing and risk management of such instruments are needed. This would require an empirical testing of different sample periods prior- and post- the credit crunch to establish the goodness of fit for using a particular dynamic index spread model, and a rigorous scenario analysis will further help to study how the variability in model parameter inputs should affect the pricing and hedging results of such products.

臺灣大學學術期刊資料庫

參考文獻

Baydar, E., Di-Graziano, G., & Korn, R. 2009. Theoretical solution versus industry standard: Optimal leverage function for CPDOs. ***Blätter DGVFM***, 30 (1): 15-29.

Carr, P., & Chou, A. 2002. ***Hedging complex barrier options.*** Working paper, Morgan Stanley and MIT Computer Science.

Cont, R., & Jessen, C. 2009. Constant proportion debt obligations (CPDOs): ***Modeling and risk analysis***. Working paper, Columbia University.

Cont, R., & Tankov, P. 2009. Constant proportion portfolio insurance in presence of jumps in asset prices. ***Mathematical Finance***, 19 (3): 379-401.

Dorn, J. 2010. Modeling of CPDOs: Identifying optimal and implied leverage. ***Journal of Banking & Finance***, 34 (6): 1371-1382.

Jobst, N., Gilkes, K., Sandstrom, N., Xuan, Y., & Zarya, S. 2007. ***CPDOs laid bare: Structure, risk and rating sensitivity***. Toronto, CA: DBRS Commentary.

Joossens, E., & Schoutens, W. 2008. An overview of portfolio insurances: CPPI and CPDO. ***JRC Scientific and Technical Reports***, EUR 23576 EN: 1-34.

Torresetti, R., & Pallavicini, A. 2011. Stressing rating criteria allowing for default clustering. In T. Bielecki, D. Brigo, & F. Patras (Eds.), ***Credit risk frontiers: Subprime crisis, pricing and hedging, CVA, MBS, ratings, and liquidity***, 20: 619-648. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc.

UBS Investment Research. 2007. ***CPDO insights on rating actions and manager impact using a new formula. UK: European Structured Credit.***

臺灣大學學術期刊資料庫

附錄 A

推論 3.2 之證明如下：

$$Delta(SF,k)_{odd}=\frac{\partial V(SF,k)}{\partial SF(t)}=p\left(\frac{SF(t)}{U_t}\right)^{p-1}\left(\frac{D_t}{U_t}\right)^{jp}\left[N(d_1)-N(d_2)\right]+\left(\frac{SF(t)}{U_t}\right)^{p}\left(\frac{D_t}{U_t}\right)^{jp}\frac{\left(n(d_1)-n(d_2)\right)}{SF(t)\cdot G\sqrt{n\delta^2}}$$

$$=\left(SF(t)\right)^{p-1}\times\left(\frac{D_t^{\,jp}}{U_t^{(j+1)p}}\right)\left\{\frac{n(d_1)-n(d_2)}{G\cdot\sqrt{n\delta^2}}+p\left[N(d_1)-N(d_2)\right]\right\}$$

$$Delta(SF,k)_{even}=\frac{\partial V(SF,k)}{\partial SF(t)}=-e^{-r(t,T)\tau}\left(\frac{U_t}{D_t}\right)^{jp}\left[\frac{n(\tilde{d_1})-n(\tilde{d_2})}{SF(t)\cdot G\cdot\sqrt{n\delta^2}}\right]$$

$$\Rightarrow Delta(SF,k)=\begin{cases}\left(SF(t)\right)^{p-1}\times\left(\frac{D_t^{\,jp}}{U_t^{(j+1)p}}\right)\left\{\frac{n(d_1)-n(d_2)}{G\cdot\sqrt{n\delta^2}}+p\left[N(d_1)-N(d_2)\right]\right\}, & k=2j+1\\ -e^{-r(t,T)\tau}\left(\frac{U_t}{D_t}\right)^{jp}\left[\frac{n(\tilde{d_1})-n(\tilde{d_2})}{SF(t)\cdot G\cdot\sqrt{n\delta^2}}\right], & k=2j\end{cases} \tag{A.1}$$

$$Vega(SF,k)_{odd}=\frac{\partial V(SF,k)}{\partial\sigma}$$

$$=\left(\frac{4r(t,T)}{\sigma^3}\right)\ln\frac{SF(t)}{U_t}\left(\frac{SF(t)}{U_t}\right)^{p}\left(\frac{D_t}{U_t}\right)^{jp}\left[N(d_1)-N(d_2)\right]$$

$$+\left(\frac{4jr(t,T)}{\sigma^3}\right)\ln\left(\frac{D_t}{U_t}\right)\left(\frac{SF(t)}{U_t}\right)^{p}\left(\frac{D_t}{U_t}\right)^{jp}\left[N(d_1)-N(d_2)\right]$$

$$=\left(\frac{SF(t)}{U_t}\right)^{p}\left(\frac{D_t}{U_t}\right)^{jp}\left[N(d_1)-N(d_2)\right]\left(\left(\frac{4r(t,T)}{\sigma^3}\right)\ln\frac{SF(t)}{U_t}+\left(\frac{4jr(t,T)}{\sigma^3}\right)\ln\left(\frac{D_t}{U_t}\right)\right)$$

$$Vega(SF,k)_{even}=\left(\frac{D_t}{U_t}\right)^{jp}\left[N(d_1)-N(d_2)\right]\left(\frac{4jr(t,T)}{\sigma^3}\right)\ln\left(\frac{D_t}{U_t}\right)$$

$$\Rightarrow Vega(SF,k)=\begin{cases}\left(\frac{SF(t)}{U_t}\right)^{p}\cdot\left(\frac{D_t}{U_t}\right)^{jp}\cdot\left[N(d_1)-N(d_2)\right]\cdot\\ \left\{\frac{4r(t,T)}{\sigma^3}\ln\left(\frac{SF(t)}{U_t}\right)+\frac{4j\cdot r(t,T)}{\sigma^3}\ln\left(\frac{D_t}{U_t}\right)\right\}, & k=2j+1\\ -e^{-r(t,T)\tau}\frac{4j\cdot r(t,T)}{\sigma^3}\ln\left(\frac{U_t}{D_t}\right)\cdot\left(\frac{U_t}{D_t}\right)^{jp}\left[N(\tilde{d_1})-N(\tilde{d_2})\right], & k=2j\end{cases} \tag{A.2}$$

臺灣大學學術期刊資料庫

作者簡介

*** 江彌修**

國立政治大學金融學系副教授。倫敦帝國大學計量金融研究所博士，倫敦帝國大學數學系碩士、學士。主要研究領域為信用風險模型、信用風險控管與金融工程。學術論文曾發表於 Journal of Derivatives, Journal of Risk and Insurance、《經濟論文》、《財務金融學刊》等期刊。

傅信豪

國立政治大學金融研究所博士生。主要研究領域為信用風險模型及金融工程。

王聖元

國立政治大學金融研究所碩士，主修為金融工程。主要研究領域為信用衍生性商品之評價與避險。

本文榮獲財團法人宋作楠先生紀念教育基金會一〇〇年度碩士論文獎。
作者們感謝財團法人宋作楠先生紀念教育基金會及匿名評審人之寶貴意見。
國科會計劃編號：100-2410-H-004-060-MY2。

* E-mail: mhchiang@mail2.nccu.tw

臺灣大學學術期刊資料庫

臺灣大學學術期刊資料庫